А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ, И. О. ОРАЗОВ

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Республика Казахстан)

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НУЛЕЙ ОДНОЙ ТРАНЦЕНДЕНТНОЙ ФУНКЦИИ

Аннотация. В данной работе изучено распределение нулей транцендентной функции $w(z) = \sin -z$.

Ключевые слова: транцендентная функция, распределение нулей.

Тірек сөздер: транценденттік функция, нөлдердің орналасуы.

Keywords: trantsendentny functions, distribution of zeroes.

Рассмотрим на комплексной плоскости z транцендентную целую функцию

$$w(z) = \sin z - z, \tag{1}$$

которая часто встречается в спектральной теорий операторов Штурма-Лиувилля [1, с. 38] и мате-матической физике [2, с. 33-34]. Известно [3, с. 385], что функция (1) имеет бесконечное мно-жество нулей, состоящих из четырех серий. Асимтотика одной из серий нулей z_n имеет вид

$$z_n = 2\pi n + i\, ln(4\pi n) + \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{lnn}{n}\right)(n \to \infty) \tag{2}$$

Остальные три серии корней уравнения $w(z) = 0$ имеют вид $\{\overline{z_n}\}, \{-z_n\}, \{-\overline{z}_n\}$.

Формула (2) хороша при больших значениях n, но имеет два недостатка. Во-первых, величина O неизвестна, во-вторых, для «малых» нулей не дает никакой информаций. В частности, неиз-вестно, какой корень уравнения $w(z) = 0$ лежит в какой области. Между тем, для многих задач механики и физики именно «малые» нули представляют особый интерес и имеют механический и физический смысл. Заметим, что формула (2) встречается во многих учебниках по теории функций комплекс-ного переменного [3, с. 385].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Изучить распределение нулей функции $w(z) = \sin z - z$, и определить, хотя бы приблизительно, местонахождение каждого конкретного нуля. Найти приблизительные расстояния между соседними нулями функции $w(z)$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

ЛЕММА 1. Если функция $w(z) = f(z)$ является аналитической в области D и на ее границе C, на который она не обращается в нуль, то логарифмический вычет $f(z)$

относительно C дает число нулей $f(z)$ в D, которое равно изменению $Arg\, f(z)$ при обходе контура C, деленному на 2π:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi}\Delta_C Arg f(z) = N$$

Это имеет место для многочлена $Q_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ [3. c. 260].

Пусть Ω – четырехугольник $ABCD$ расположенный на комплексной полскости z, с вершинами в точках $A(-a-ib), B(a-ib), C(a+ib), D(-a+ib)$, где a, b произвольные положительные числа. Тогда имеет место лемма.

ЛЕММА 2. Если имеют место равенства

а) $w(\bar{z}) = \overline{w(z)}$;

б) $w(-z) = -w(z)$,

то имеют место формулы

а) $\Delta Arg w(z)/_A^B = \Delta Arg w(z)/_C^D$;

б) $\Delta Arg\, w(z)/_B^C = \Delta Arg\, w(z)/_D^A$.

ЛЕММА 3. Функция $w(z)$ не обращается в нуль на координатных осях, исключая начало координат $z = 0$, где она имеет трехкратный нуль.

ЛЕММА 4. Функция $w(z)$ не имеет нулей в полосах

комплексной z плоскости.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 1. На первой четверти ($x > 0$, $y > 0$) комплексной z плоскости функция $w(z)$ имеет бесконечное множество нулей, расположенных по одному в полосах

Остальные три серии расположены в других четвертях и имеют вид $\{\bar{z}_n\}$, $\{-z_n\}$, $\{-\bar{z}_n\}$.

Асимтотика корней z_n имеет вид

$$z_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} + i\, ln(4\pi n) + O\left(\frac{ln n}{n}\right)(n \to \infty).$$

Точка $z = 0$ является трехкратным нулем функции $w(z) = \sin -z$, других нулей, расположенных на координатных осях, она не имеет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим количество нулей функции $w(z)$ внутри полосы $-\frac{\pi}{2} \le Rez \le \frac{\pi}{2}$. Для этого подсчитаем изменение аргумента внутри четырехугольника $ABCD$ с вершинами, расположенных в точках $A\left(-\frac{\pi}{2},-b\right), B\left(\frac{\pi}{2},-b\right), C\left(\frac{\pi}{2},b\right), D\left(-\frac{\pi}{2},b\right)$, где b достаточное большое положительное число, затем устремим b к $+\infty$.

Заметим, что

$$u = Re\, w(z) = \sin x \times ch y - x,$$

$$v = Im\, w(z) = \cos x \times sh y - y\ ,$$

поэтому

$$u(A) = -chb + \frac{\pi}{2} < 0, \qquad v(A) = b > 0,$$

следовательно,

$$\arg w(A) = \pi + arctg\frac{v}{u} = \pi + arctg\frac{b}{-chb+\frac{\pi}{2}},$$

$$\lim_{b\to+\infty} \arg w(A) = \pi;$$

Аналогично имеем

$$argw(B) = 2\pi + arctg\frac{b}{chb - \frac{\pi}{2}},$$

следовательно

$$\Delta\, Arg\ w(z)\Big|_A^B = \pi + arctg\frac{b}{chb - \frac{\pi}{2}} - arctg\frac{b}{-chb + \frac{\pi}{2}},$$

$$\lim_{b\to+\infty} \Delta Arg\ w(z)\Big|_A^B = \pi.$$

Тогда

$$\Delta Arg\ w(z)\Big|_C^D = \Delta Arg\ w(z)\Big|_A^B,$$

поэтому

$$\lim_{b\to+\infty} \Delta\, Arg\ w(z)\Big|_C^D = \pi.$$

Теперь подсчитаем изменение аргумента вдоль отрезка BC. Несложно показать, что

$$\lim_{b\to+\infty} \Delta\, Arg\ w\Big|_B^C = 2\pi,$$

тогда

$$\Delta\, Arg\, w\,\Big|_D^A = \Delta\, Arg\, w\,\Big|_B^C.$$

поэтому

$$\lim_{b\to+\infty} \Delta\, Arg\, w\,\Big|_D^A = 2\pi.$$

Следовательно, изменение аргумента вдоль контура *ABCD*

$$\Delta_{ABCD} w(z) = 2\pi + 2\pi + 2\pi = 6\pi.$$

Поэтому в полосе $-\frac{\pi}{2} < Rez < \frac{\pi}{2}$ находится корень уравнения $w(z) = 0$

$$N = \frac{6\pi}{2\pi} = 3\ .$$

Теперь найдем приращения аргумента функции внутри полосы

Для этого подсчитаем изменение аргумента функции $w(z)$ вдоль контура четырехугольника *ABCD* с вершинами, расположенных в точках $A(2n\pi, -b), B\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}, -b\right),\ \ C\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}, b\right), D(2n\pi, b),$ где $b > 0$ достаточно большое положительное число.

Вдоль отрезка *BC* имеем: $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, -b \le y \le b,$ поэтому $\lim\limits_{b\to+\infty} \Delta\, Arg\, w(z)\Big|_B^C = 2\pi.$

Вдоль отрезка *AB* имеем

$$\lim_{b\to+\infty} \Delta\, Arg\, w(z)\,\Big|_A^B = 0 - \left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2};$$

Вдоль *CD* имеем

$$\lim_{b\to+\infty} \Delta\, Arg\, w(z)\,\Big|_C^D = \lim_{b\to+\infty} \Delta\, Arg\, w(z)\,\Big|_A^B = \frac{\pi}{2}.$$

Вдоль отрезка *DA* имеем

$$\lim_{b\to+\infty} \Delta\, Arg\, w(z)\,\Big|_D^A = \pi$$

Таким образом, вдоль контура четырехугольника *ABCD* имеем

$$\Delta_{ABCD} Arg\, w(z) = 2\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi = 4\pi.$$

Следовательно, внутри полосы количество нулей функции $w(z)$ равно $N = 4\pi|2\pi = 2.$

ЛИТЕРАТУРА

1 Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1977. – 331 с.
2 Смирнов М.М. Задачи и упражнения по математической физике. – М.: Наука, 1968. – 112 с.
3 Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.Н. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1982. – 488 с.

REFERENCES

1 Marchenko V.A. Operatory Shturma-Liuvillja i ih prilozhenija. Kiev: Naukova dumka, 1977. 331 s.

2 Smirnov M.M. Zadachi i uprazhnenija po matematicheskoj fizike. M.: Nauka, 1968. 112 s.

3 Sidorov Ju.V., Fedorjuk M.V., Shabunin M.N. Lekcij po teorij funkcij kompleksnogo peremennogo. M.: Nauka, 1982. 488 s.

Резюме

А. Ш. Шалданбаев, И. О. Оразов

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан Республикасы)

БІР ТРАНЦЕНДЕНТТІ ФУНКЦИЯДАҒЫ НӨЛДЕРДІҢ ОРНАЛАСУ ТӘРТІБІ ТУРАЛЫ

Бұл еңбекте транцендентті $w(z) = \sin -z$ функциясының нөлдерінің орналасу тәртібі толық зерттелген.

Тірек сөздер: транценденттік функция, нөлдердің орналасуы.

Summary

A. Sh. Shaldanbayev, I. O. Orazov

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Republic of Kazakhstan)

ON THE DISTRIBUTION OF ZEROS OF A TRANSCENDENT FUNCTION

In this work distribution of zero trantsendentny functions $w(z) = \sin -z$ is studied.

Keywords: trantsendentny functions, distribution of zeroes.

Поступила 15.10.2013г.