А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ, И. О. ОРАЗОВ

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Республика Казахстан)

КРИТЕРИЙ *S* САМОСОПРЯЖЕННОСТИ ОБРАТИМОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация. В данной работе установлен критерий *S* самосопряжености обратимого оператора Штурма-Лиувилля.

Ключевые слова: критерий, самосопряженность, обратимый, оператор, Штурм-Лиувилль.

Тірек сөздер: критерий, жалқылық, қайтымды, оператор, Штурм-Лиувилл.

Keywords: criterion самосопряженность, reversible, the operator Sturm-Liuvill.

Рассмотрим в пространстве $L^2(0,1)$ обратимый оператор Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x);\ x \in (0,1) \tag{1}$$

$$U_i[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \ \ (i = 1,2) \tag{2}$$

где $a_{ij}(i = 1,2; j = 1,2,3,4)$ – произвольные комплексные постоянные, $y(x) \in D(L) = \{y(x) \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1]: U_i[y] = 0 \ (i = 1,2)\}$, т.е. функций $y(x)$ дважды непре-рывно дифференцируемы на интервале (0,1) и непрерывно дифференцируемы на всем сегменте [0,1]. Линейное многообразие $D(L)$ называется областью определения оператора Штурма-Лиувилля (1)–(2).

Через S обозначим оператор, определяемый формулой

$$Su(x) = u(1 - x), \qquad \forall x \in [0,1] \text{ и } u(x) \in L^2(0,1). \tag{3}$$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. При каких условиях на коэффиценты $a_{ij}(i = 1,2; j = 1,2,3,4)$ имеет место формула

$$SL = L^*S, \tag{4}$$

где L^* – оператор формально сопряженный к оператору L, т.е. $\forall y(x) \in D(L)$ и $z(x) \in D(L^*)$ имеет место равенство

$$(Ly, z) = (y, L^*z).$$

где (.,.) – скалярное пройзведение пространства $L^2(0,1)$, т.е. $\forall f(x), g(x) \in L^2(0,1)$

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)\bar{g}(x)\,dx.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор Штурма-Лиувилля (1)–(2), удовлетворяющий условию (4). назовем S самосопряженной.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функциями экспоненциального типа называются целые функций, порядок которых меньше 1 либо равен 1, то тогда тип конечен [1, с. 42].

ЛЕММА 1. Если функция экспоненциального типа $f(z)$ не имеет нулей на всей комплексной плоскости, то

$$f(z) = e^{az+b},$$

где a, b – некоторые комплексные числа [2, с. 31].

Рассмотрим в пространстве $L^2(0,1)$ задачу на собственные значения для оператора Штурма-Лиувилля

$$Ly = \lambda y$$

$$U_i[y] = 0 \qquad (i = 1,2)$$

с двумя (i = 1,2) линейно независимыми краевыми условиями. Собственные значения этой задачи совпадают с квадратами корней ее характеристической функций [3, с. 33].

$$\Delta(\lambda) = \Delta_{12} + \Delta_{34} + \Delta_{13}\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + (\Delta_{14} + \Delta_{32})\cos\sqrt{\lambda} - \Delta_{42}\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}, \tag{5}$$

где

$$\Delta_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{2i}a_{1j} (i,j = 1,2,3,4). \tag{6}$$

ЛЕММА 2. Если имеет место формула (4), где L – обратимый оператор Штурма-Лиувилля, а оператор S определен формулой (3), то существует такое комплексное число k, $|k| = 1$, что имеет место равенства

1) $\bar{\Delta}_{12} + \bar{\Delta}_{34} = k(\Delta_{12} + \Delta_{34})$; 2) $\bar{\Delta}_{13} = k\Delta_{13}$; 3) $\bar{\Delta}_{14} + \bar{\Delta}_{32} = k(\Delta_{14} + \Delta_{32})$;

4) $\bar{\Delta}_{24} = k\Delta_{24}$; 5) $k = \frac{\overline{\Delta(0)}}{\Delta(0)}, \Delta(0) = \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (4) имеем $L^* = S^{-1}LS$, т.е. операторы L^* и L подобны. Подобные операторы имеют одинаковый спектр, поэтому в силу леммы 1 имеет место формула $\Delta^*(\lambda^2) = k_1^* \Delta(\lambda^2)$, где $\Delta^*(\lambda^2)$ характеристическая функция сопряженного оператора L^{*}. С дру-гой стороны, в силу той же леммы имеем $\Delta^{*}(\lambda) = k_2^{*}\overline{\Delta(\bar{\lambda})}$, где k_1^{*}, k_2^{*} – некоторые постоянные. Следовательно,

$$\overline{\Delta(\bar{\lambda}^2)} = \frac{k_1^{*}}{k_2^{*}}\Delta(\lambda^2) = k\Delta(\lambda^2),\ k = \frac{k_1^{*}}{k_2^{*}}. \tag{7}$$

В силу обратимости оператора L, имеет место неравенство $\Delta(0) \neq 0$, поэтому

$\bar{\Delta}(0) = k \times \Delta(0),\ k = \frac{\bar{\Delta}(0)}{\Delta(0)},\ |k| = 1.$ Подставив (5) в (7), получим

$$\bar{\Delta}_{12} + \bar{\Delta}_{34} + \bar{\Delta}_{13}\frac{\sin\lambda}{\lambda} + (\overline{\Delta_{14} + \Delta_{32}})\cos\lambda - \bar{\Delta}_{42}\lambda\sin\lambda =$$

$$= k\left[\Delta_{12} + \Delta_{34} + \Delta_{13}\frac{\sin\lambda}{\lambda} + (\Delta_{14} + \Delta_{32})\cos\lambda - \Delta_{42}\lambda\sin\lambda\right].$$

Сравнивая левую и правую часть этой формулы, получим утверждение леммы.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 1. Если L – обратимый оператор Штурма-Лиувилля, а оператор S определен фор-мулой (3), то равенство (4) имеет место тогда и только тогда, когда

1) $\bar{\Delta}_{13} = k\Delta_{13}$;

2) $\bar{\Delta}_{12} + \bar{\Delta}_{14} = (\Delta_{12} + \Delta_{32})$; **(8)**

3) $\bar{\Delta}_{14} + \bar{\Delta}_{34} = k(\Delta_{32} + \Delta_{34})$; 4) $\bar{\Delta}_{14} + \bar{\Delta}_{42} = k(\Delta_{32} + \Delta_{42})$,

где $k = \frac{\bar{\Delta}(0)}{\Delta(0)}$, $\Delta(0) = \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}$, Δ_{ij}[см. (6)].

Если имеет место формула (4), то в силу леммы 2, справедливы равенства 1)–5). Сравнивая формулу 4) с пунктом 4) формулы (8) выводим, что $\bar{\Delta}_{14} = k\Delta_{32}$. Тогда с пункта 3) формулы (8) имеем $\bar{\Delta}_{34} = k\Delta_{34}$, а со второго пункта этой же формулы получим $\bar{\Delta}_{12} = k\Delta_{12}$.

Таким образом, если для обратимого оператора Штурма-Лиувилляимеет место формула (4),то справедливы формулы

1) $\bar{\Delta}_{12} = k\Delta_{12}$; 2) $\bar{\Delta}_{13} = k\Delta_{13}$; 3) $\bar{\Delta}_{14} = k\Delta_{32}$;

4) $\bar{\Delta}_{32} = k\Delta_{14}$; 5) $\bar{\Delta}_{24} = k\Delta_{24}$; 6) $\bar{\Delta}_{34} = k\Delta_{34}$,

где $k = \frac{\overline{\Delta(0)}}{\Delta(0)}$, $\Delta(0) = \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}$, Δ_{ij}[см. (6)]

Несложно показать, что верно и обратное утверждение, следовательно справедливо также сле-дующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Если L – обратимый оператор Штурма-Лиувилля, то формула (4) имеет место тогда и только тогда, когда

1) $\bar{\Delta}_{12} = k\Delta_{12}$; 2) $\bar{\Delta}_{13} = k\Delta_{13}$; 3) $\bar{\Delta}_{14} = k\Delta_{32}$;

4) $\bar{\Delta}_{32} = k\Delta_{14}$; 5) $\bar{\Delta}_{24} = k\Delta_{24}$; 6) $\bar{\Delta}_{34} = k\Delta_{34}$,

где $k = \dfrac{\bar{\Delta}(0)}{\Delta(0)}$, $\quad \Delta(0) = \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}$.

ЛИТЕРАТУРА

1 Леонтьев А.Ф. Целые функций. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – С. 176.

2 Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке времени // Известия АН РК. Серия физ.-мат. – 2000. – № 3. – С. 29-34.

3 Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Науква думка, 1977. – С. 329.

REFERENCES

1 Leont'ev A.F. Celye funkcij. Rjady jeksponent. M.: Nauka, 1983. S. 176.

2 Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. O strukture spektra kraevoj zadachi Shturma-Liuvillja na konechnom otrezke vremeni // Izvestija AN RK. Serija fiz.-mat. 2000. № 3. S. 29-34.

3 Marchenko V.A. Operatory Shturma-Liuvillja i ih prilozhenija. Kiev: Naukva dumka, 1977. S. 329.

Резюме

А. Ш. Шалданбаев, И. О. Оразов

ҚАЙТЫМДЫ ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫ

S ЖАЛҚЫЛЫҒЫНЫҢ КРИТЕРИЙІ

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан Республикасы)

Бұл еңбекте қайтымды Штурм-Лиувилл операторының *S* жалқылығының үзілді кесілді шарттары табылған.

Тірек сөздер: критерий, жалқылық, қайтымды, оператор, Штурм-Лиувилл.

Summary

A. Sh. Shaldanbayev, I. O. Orazov

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Republic of Kazakhstan)

CRITERION *S* ITSELF CONJUGACY

OF AN INVERTIBLE OPERATOR OF STURM-LIOUVILLE

In this work the criterion S self-conjugacies of the reversible operator of Storm Liouville is established.

Keywords: criterion самосопряженность, reversible, the operator Sturm-Liuvill.

Поступила 15.10.2013г.