А.Ш. ШАЛДАНБАЕВ, К.Ж. РУСТЕМОВА

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М.Ауезова, г. Шымкент)

КРИТЕРИЙ САМОСОПРЯЖЕННОСТИ ВОЛЬТЕРРОВА ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

Аннотация

В настоящей работе получен критерий самосопряженности вольтеррова оператора Штурма-Лиувилля по некоторой индефинитной метрике.

Ключевые слова: оператор Штурма-Лиувилля, пространство с индефинитной метрикой, собственные значения, собственные функции.

Кілт сөздер: Штурм-Лиувилл операторы, индефиниттік метрика кеңістігі, меншікті мағына, меншікті функ-циялар.

Keywords: Sturm-liouville Operator, space indefinite metric, its own values, its own function.

Рассмотрим в пространстве $L^2(0,1)$ краевую задачу Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x); \;\; x \in (0,1) \qquad (1)$$

$$U_i[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \;\; (i = 1,2) \qquad (2)$$

с двумя (I = 1,2) линейно независимыми граничными условиями (2), где $a_{ij}(i = 1,2, j = 1,2,3,4)$ – произвольные комплексные числа, т.е. предполагается, что хотя бы один из миноров

$$\Delta_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i} \quad (i,j = 1,2,3,4) \qquad (3)$$

граничной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

отличен от нуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор Штурма-Лиувилля (1)-(2) называется вольтерровой, если он не имеет собственных значений на всей конечной части комплексной плоскости *C*.

Пусть *L* вольтерровый оператор Штурма-Лиувилля, тогда его сопряженный L^* также является вольтерровым. Через *S* обозначим оператор, заданный формулой

$$Su(x) = u(1 - x), \qquad \forall u(x) \in L^2(0,1) \tag{5}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Вольтерровый оператор Штурма-Лийвилля *L* называется *S* самосопряженным, если имеет место формула

$$SL = L^*S \tag{6}$$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. При каких условиях на миноры матрицы (4) для вольтеррового оператора Штурма-Лиувилля (1)-(2) имеет место формула (6)

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Собственные значения задачи Штурма-Лиувилля (1)-(2) являются квадратами корней уравнения

$$\Delta(\lambda) = \Delta_{12} + \Delta_{34} + \Delta_{13}\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + (\Delta_{14} + \Delta_{32})\cos\sqrt{\lambda} + \Delta_{24}\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} = 0,$$

где Δij вычисляются по формуле (3) [1.с.35]. Эта функция относится к классу целых функций экспоненциального типа [2.с.42], для которых справедлива лемма 1 [3.с.31].

ЛЕММА 1. Если функция экспоненциального типа *f*(*z*) не имеет нулей на всей комплексной плоскости, то

$$f(z) = e^{az+b},$$

где *a,b* – некоторые комплексные числа.

ЛЕММА 2. Оператор Штурма-Лиувилля (1)-(2) вольтерров тогда и только тогда, когда

$$\Delta_{24} = 0, \qquad \Delta_{14} + \Delta_{32} = 0, \qquad \Delta_{13} = 0, \qquad \Delta_{12} + \Delta_{34} \neq 0, \tag{8}$$

где $\Delta_{ij}(i,j = 1,2,3,4)$ находятся по формуле (3).

Достаточность условий (8) следует из формулы (7), а необходимость является следствием леммы 1.

ЛЕММА 3. Если оператор Штурма-Лиувилля (1)-(2) вольтерров, то существует комплексное число *k*, такое, что граничные условия (2) эквивалентны к граничным условиям

$$y(0) = ky(1), \qquad y'(0) = -ky'(1), k \in C$$

В работе [3] приведено подробное доказательство этой леммы.

ЛЕММА 4. Если L обратимый оператор Штурма-Лиувилля, а оператор S определен формулой (5) , то равенство (6) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\frac{\Delta_{13}}{\Delta(0)} = \frac{\overline{\Delta_{13}}}{\overline{\Delta(0)}}, \qquad \frac{\Delta_{12} + \Delta_{32}}{\Delta(0)} = \frac{\overline{\Delta_{12}} + \overline{\Delta_{14}}}{\overline{\Delta(0)}}, \tag{9}$$

$$\frac{\Delta_{32} + \Delta_{34}}{\Delta(0)} = \frac{\overline{\Delta_{14}} + \overline{\Delta_{34}}}{\overline{\Delta(0)}}, \qquad \frac{\Delta_{32} + \Delta_{12}}{\Delta(0)} = \frac{\overline{\Delta_{14}} + \overline{\Delta_{12}}}{\overline{\Delta(0)}},$$

где $\Delta(0) = \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}$, $\Delta_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i} \quad (i,j = 1,2,3,4)$.

3.ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

ТЕОРЕМА 1. Если L вольтерровый оператор Штурма-Лиувилля вида

$$Ly = -y''(x); \quad x \in (0,1) \tag{10}$$

$$y(0) = ky(1), \qquad y'(0) = -ky'(1), \qquad k \in C \tag{11}$$

то равенство

$$SL = L^{*}S \tag{6}$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$k + \bar{k} = 0 . \tag{12}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В нашем случае матрица (4) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\Delta_{12} = 1, \Delta_{13} = 0, \qquad \Delta_{14} = k, \qquad \Delta_{32} = -k, \qquad \Delta_{24} = 0, \qquad \Delta_{34} = -k^2 \tag{13}$$

В силу вольтерровости оператора L имеет место неравенство

$$\Delta(0) = \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34} = 1 - k^2 \neq 0$$

Подставив, найденных величин (13) в (9), имеем

$$\Delta_{12} + \Delta_{32} = 1 - k, \overline{\Delta_{12}} = 1, \overline{\Delta_{14}} = \bar{k}, \Rightarrow$$

$$\frac{1 - k}{1 - k^2} = \frac{1 + \bar{k}}{1 - \bar{k}^2}, \frac{1}{1 + k} = \frac{1}{1 - \bar{k}}, 1 - \bar{k} = 1 + k, \Rightarrow \bar{k} + k = 0;$$

$$\frac{\Delta_{32} + \Delta_{34}}{\Delta(0)} = \frac{-k - k^2}{1 - k^2} = \frac{\bar{k} - \bar{k}^2}{1 - \bar{k}^2}, \qquad \frac{-k(1 + k)}{1 - k^2} = \frac{\bar{k}(1 - \bar{k})}{1 - \bar{k}^2},$$

$$\Rightarrow \frac{-k}{1-k} = \frac{\bar{k}}{1+\bar{k}}, -k\left(1+\bar{k}\right) = \bar{k}(1-k), \Rightarrow -k - |k|^2 = \bar{k} - |k|^2, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -k = \bar{k}, \qquad \bar{k} + k = 0;$$

$$\frac{\Delta_{3_2} + \Delta_{4_2}}{\Delta(0)} = \frac{-k}{1-k^2} = \frac{\bar{k}}{1-\bar{k}^2}, -k\left(1-\bar{k}^2\right) = \bar{k}\left(1-\bar{k}^2\right), \Rightarrow$$

$$-k + k\bar{k}^2 = \bar{k} - \bar{k}k^2, -k + \bar{k}|k|^2 = \bar{k} - k|k|^2, \bar{k} + k - k|k|^2 - \bar{k}|k|^2 = 0,$$

$$\bar{k} + k - |k|^2\left(k+\bar{k}\right) = 0, \left(k+\bar{k}\right)\left(1-|k|^2\right) = 0$$ при $\bar{k} + k = 0$.

СЛЕДСТВИЕ. Если $\bar{k} + k = 0$, то оператор SL самосопряжен в пространстве $L^2(0,1)$, где оператор S определен формулой (5), это означает, что оператор Штурма-Лиувилля (10)-(11) самосопряжен в пространстве с индефинитной метрикой, порожденной скалярным произведением [u,v]=(Su,v), где (.,.)- означает скалярное произведение в пространстве $L^2(0,1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1 Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Науква думка, 1977. 329с.

2 Леонтьев А.Ф. Целые функций. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983, 176с.

3 Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке времени.// Известия АН РК, серия физ.-мат. 2000. №3, С. 29-34.

REFERENCES

1 Marchenko V.A. Operatory Sturma-Liuvillya I ih prilozhenya. Kiev: Nauka dumka, 1977. -329 (in Russ.).

2 Leont’ev A.Ph. Celye funkcii. Ryady exponent. M.: Nauka, 1983, -17 (in Russ.).

3 Kal’menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. O structure spectra kraevoi zadachi Shturma-Liuvillya na konechnom otrezke vremeni.// Izvestya AN RK, serya phis.-мath. 2000. №3, 29-34(in Russ.).

Резюме

А.Ш. Шалданбаев, К.Ж. Рүстемова

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент қ.)

ИНДЕФИНИТТІ КЕҢІСТІКТЕГІ ШТУРМ- ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫ

ЖАЛҚЫЛЫҒЫНЫҢ ҮЗІЛДІ-КЕСІЛДІ БЕЛГІСІ

Бұл еңбекте волтерлі Штурм-Лиувилл операторының, индефиниттік метрика кеңістігіндегі, жалқы оператор болуының үзілді кесілді шарттары табылған.

Кілт сөздер: Штурм-Лиувилл операторы, индефиниттік метрика кеңістігі, меншікті мағына, меншікті функ-циялар.

Summary

A. SH. Shaldanbaev, K.J. Rustemova

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent)

CRITERION OF SELF-ABJOINT OF VOLTERRA STURM-LIOUVILLE OPERATORS

IN SPACES WITH AN INDEFINITE METRICS

At the present paper we obtain a criterion for self-abjuring Volterra Sturm-Liouville problem for some indefinite metric.

Keywords: Sturm-liouville Operator, space indefinite metric, its own values, its own function.

Поступила 22.04.2013 г.