А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ, А. А. КОПЖАСАРОВА

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, г. Шымкент)

СПЕКТРАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация

В данной работе получено спектральное разложение вольтеррова оператора Штурма–Лиувилля в про-странстве Крейна.

Ключевые слова: обратный оператор, краевая задача, оператор Штурма–Лиувилля, ортонормирован-ный базис, спектральные разложения.

Кілт сөздер: кері оператор, шеткі есеп, Штурман–Лиувилль операторы, ортонормаланған базис, спект-ральдық таралым.

Keywords: inverse, boundary problem, the Sturm-Liouville orthonormal basis, the spectral decompo- sition.

Рассмотрим в пространстве $H = L^2(0,1)$ краевую задачу Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x); \qquad x \in (0,1) \tag{1}$$

$$U_i = [y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0, \ (i = 1,2) \tag{2}$$

с двумя (i = 1,2) линейно независимыми граничными условиями (2), где a_{ij} (i = 1,2; j = 1,2,3,4) – произвольные комплексные числа, спектральный параметр. Последнее условие означает, что хотя бы один из миноров

$\Delta_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{1j} \times a_{2i} (i,j = 1,2,3,4)$ граничной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \tag{3}$$

отличен от нуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор Штурма-Лиувилля (1)-(2) называется вольтерровой, если он не имеет собственных значений на всей конечной части комплексной z плоскости C.

Пусть L – вольтерровый оператор Штурма-Лиувилля, тогда его сопряженный L^* также является вольтерровым. Через S обозначим оператор, заданного формулой

$$Su(x) = u(1-x),\ \forall u(x) \in L^2(0,1) \qquad (4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Вольтерровый оператор Штурма-Лиувилля L называется S самосопряжен-ным, если имеет место равенство

$$SL = L^*S \qquad (5)$$

Постановка задачи. Получить «спектральное» разложение вольтеррового оператора Штурма-Лиувилля, удовлетворяющего условию (5).

Основная идея работы состоит в следующем. При выполнении условия (5) оператор SL окажется самосопряженный. Если принять во внимание компактность оператора L^{-1}, то оператор SL^{-1} окажется самосопряженным и компактным оператором, для которого справедлива теорема Гильберта-Шмидта, суть которой состоит в следующем.

Для любого компактного самосопряженного линейного оператора A в гильбертовом простран-стве H существует ортогональная нормированная система $\{\varphi_n\}$ собственных векторов, отвечающих собственным значениям $\{\lambda_n\}$, такая, что каждый элемент $x \in H$ записывается единственным образом

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}(x,\varphi_n)\,\varphi_n + \varphi_0 \qquad (6)$$

где вектор $\varphi_0 \in \mathrm{Ker}A$, т.е удовлетворяет условию $A\varphi_0 = 0$; при этом

$$Ax = \sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n(x,\varphi_n) \times \varphi_n (\lambda_n \neq 0) \qquad (7)$$

и если система $\{\varphi_n\}$ бесконечна, то $\lim\lambda_n = 0$ $(n \to \infty)$ [1, с. 231].

Из этой теоремы следует, что если $\mathrm{Ker}A = \{0\}$, т.е $\varphi_0 = 0$, то ортогональная нормированная система $\{\varphi_n\}$ образует ортонормированный базис пространстве H. Этот момент нами используется существенно, а также формулы (6) и (7).

Отметим очевидные свойства оператора S [см.ф.(5)]. Этот оператор унитарен и самосопряжен в пространстве H, поэтому имеет место формулы $S^2 = I$, $S^{-1} = S$, где I тождественный оператор.

2. Вспомогательные предложения. Собственные значения задачи Штурма-Лиувилля (1)-(2) являются квадратами корней уравнения

$$\Delta(\lambda) = \Delta_{12} + \Delta_{34} + \Delta_{13}\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + (\Delta_{14} + \Delta_{32})\cos\sqrt{\lambda} + \Delta_{24}\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} = 0, \qquad (8)$$

где Δ_{ij} находятся по формуле (3) [2, с. 35]. Функция $\Delta(\lambda)$ относится к классу целых функций экспанциального типа [3, с. 42], для которых справедлива лемма 1 [4, с. 31].

ЛЕММА 1. Если функция экспоненциального типа $f(z)$ не имеет нулей на всей комплексной плоскости, то

$$f(z) = e^{az+b},$$

где a, b – некоторые комплексные числа.

ЛЕММА 2. Оператор Штурма-Лиувилля (1)-(2) вольтерров тогда и только тогда, когда

$$\Delta_{24} = 0, \Delta_{14} + \Delta_{32} = 0, \quad \Delta_{13} = 0, \Delta_{12} + \Delta_{34} \neq 0 \tag{9}$$

где Δ_{ij} (j = 1,2,3,4) вычисляется по формуле (3).

Достатоточность условий (9) следует из формулы (8), а необходимость является следствием леммы 1.

ЛЕММА 3. Если оператор Штурма-Лиувилля (1)-(2) вольтерров, то существует комплексное число k такое, что граничные условия (2) эквивалентны к граничным условиям

$$y(0) = ky(1), \quad y'(0) = -ky'(1), \; k \in C.$$

ЛЕММА 4. Если L – волтерровый оператор Штурма-Лиувилля вида

$$Ly = -y''(x); \; x \in (0,1) \tag{10}$$

$$y(0) = ky(1), \; y'(0) = -ky'(1), \; k \in C, \tag{11}$$

то формула

$$SL = L^*S,$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\bar{k} + k = 0.$$

ЛЕММА 5. Если $k^2 - 1 \neq 0$, то существует обратный оператор к оператору (10)-(11), который является компактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко показать, что обратный оператор L^{-1} к оператору (10)-(11) имеет вид

$$y(x) = L^{-1}f(x) = \int_0^1 K(x,t)\, f(t)dt, \tag{12}$$

где

$$K(x,t) = \frac{(kx + kt + t - x - k)\theta(x-t) + k(x - kx + kt + t - 1)\theta(t-x)}{1-k^2} \tag{13}$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \geq 0 \\ 0, \text{ если } x < 0 \end{cases}$$

Из формулы (13) очевидна ограниченность ядра внутри квадрата $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, поэтому это ядро относится к классу Гильберта-Шмидта, следовательно, оператор (12) является вполне непрерывным в пространстве $L^2(0,1)$ [5.с. 155].

3. Основные результаты

ТЕОРЕМА 1. Если $\bar{k}+k=0$, то для вольтеррова оператора ($k^2 \neq 1$)

$$Ly = -y''(x); \;\; x \in (0,1) \tag{10}$$

$$y(0) = ky(1), \;\; y'(0) = -ky'(1) \tag{11}$$

имеет место формулы

$$L^{-1}f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, S\varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n, \tag{14}$$

$$Lg = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (g, \varphi_n) S\varphi_n, \tag{15}$$

где S определен формулой (4) λ_n – собственные значения самосопряженного оператора SL, φ_n – ортонормированные собственные функций этого же оператора в пространстве $L^2(0,1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4 и условий теоремы, оператор SL самосопряжен в пространстве H. Тогда в силу леммы 5, оператор $(SL)^{-1}$ самосопряжен и компактен в пространстве $L^2(0,1)$. Если $(SL)^{-1}\varphi = 0$, то действуя оператором SL слева, имеем $\varphi = 0$, следовательно $\mathrm{Ker}(SL)^{-1} = \{0\}$.

Поэтому ортонормированные собственные функции оператора $(SL)^{-1}$ образуют ортонормиро-ванный базис пространства H. Тогда для любого элемента f пространства H имеем

$$(SL)^{-1}f = \sum_{n=1}^{\infty} ((SL)^{-1}f, \varphi_n) \times \varphi_n,$$

где $\{\varphi_n\}$ ортонормированный базис пространства H, составленный из собственных векторов оператора SL, т.е. имеет место равенства

$$SL\varphi_n = \lambda_n \varphi_n, \quad (\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}.$$

Следовательно

$$(Sl)^{-1}f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, (SL)^{-1}\varphi_n)\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n;$$

Преобразуя левую часть этой формулы, получим

$$L^{-1}Sf = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n.$$

Теперь, заменив в последней формуле f на Sf, имеем

$$L^{-1}f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Sf, \varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, S\varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n$$

Аналогичным путем получим $\forall g \in D(L)$

$$SLg = \sum_{n=1}^{\infty}(SLg, \varphi_n) \times \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}(g, SL\varphi_n)\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}(g, \lambda_n\varphi_n)\varphi_n =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(g, \varphi_n)\varphi_n, \to Lg = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\,(g, \varphi_n)S\varphi_n.$$

ЛИТЕРАТУРА

1 Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. – 544 с.

2 Пятков С.Г., Егоров И.Е., Попов С.В. Неклассические дифференциально-операторные уравнения. – Новосибирск: Наука, 2000. – 336 с.

REFERENCES

1 Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funkcii I funkcional’nogo analiza. – M.: Nauka, 1976. – 544(in Russ.).

2 Pyatovskii S.G., EgorovI.E., PopovS.V.Neklassicheskiedifferencial’no-operatornyeuravneniya. – Novosibirsk: Nauka, 2000. – 336 (in Russ.).

А. Ш. Шалданбаев, А. А. Көпжасарова

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент қ.)

ШТРУМ–ЛИУВИЛЛ ВОЛТЕРЛІ ОПЕРАТОРЫНЫҢ СПЕКТРАЛДЫ ЖІКТЕЛУІ

Бұл еңбекте волтерлі Штурм–Лиувилл операторының Крейн кеңістігіндегі спектралды таралымы алынды.

Кілт сөздер: кері оператор, шеткі есеп, Штурман–Лиувилль операторы, ортонормаланған базис, спект-ральдық таралым.

Summary

A. Sh. Zhaldanbayev, A.A. Kopzhasarova

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent)

SPECTRAL DECOMPOSITION OF THE STURM–LIOUVILLE VOLTERRA OPERATORS

In this paper, spectral decomposition Volltera the operator of Sturm–Liouville in Crane's space is received.

Keywords: inverse, boundary problem, the Sturm-Liouville orthonormal basis, the spectral decomposition.

Поступила 6.02.2013г