МАТЕМАТИКА

УДК 512.95

А.Ш.ШАЛДАНБАЕВ

РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ МЕТОДОМ ОТКЛОНЯЮЩЕГОСЯ АРГУМЕНТА

(Представлена академиком НАН РК Т.Ш. Кальменовым)

1. Рассмотрим в пространстве $H = L^2(0,1)$ сингулярно возмущенную задачу Коши:

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + ay(x) = f(x), \quad x \in (0,1], \qquad (1)$$

$$y(0) = 0, \qquad (2)$$

где $f(x) \in H$, $a > 0$, а ε – положительный малый параметр.

Существуют различные методы решения задачи [1-3], мы предлагаем метод, основанный на спектральной теории линейных операторов. Дело в том, что задаче (1)-(2) соответствует линейный оператор:

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + ay(x),$$

определенный на линейном многообразии непрерывных на отрезке $[0,1]$ и непрерывно дифференцируемых на полу интервале $(0,1]$ функции $y(x)$, удовлетворяющих условию:

$$y(0) = 0.$$

Пусть $D(L_\varepsilon) = \{y(x) \in C^1(0,1] \cap C[0,1],\ y(0) = 0\}$ область определения, а $R(L_\varepsilon)$ – область значений оператора L_ε. Из условия $a > 0$ следует полуограниченность снизу оператора L_ε, что обеспечивает существование обратного и ограниченного оператора L_ε^{-1}, определенного на области значении $R(L_\varepsilon)$. Поскольку для любой непрерывной функции $f(x)$ существует единственное решение задачи Коши (1)+(2), то $R(L_\varepsilon)$ – совпадает с линейным многообразием непрерывных функций на отрезке $[0,1]$. Линейное многообразие непрерывных функций всюду плотно в пространстве H, поэтому обратный оператор L_ε^{-1} продолжается на все пространство H по непрерывности, следовательно, область значении замыкания оператора L_ε совпадает со всем пространством H, т.е. $R(\overline{L_\varepsilon}) = H$.

Нетрудно заметить, что оператор SL_ε симметричена на области определения $D(L_\varepsilon)$, где оператор S определен формулой:

$$Su(x) = u(1-x).$$

Очевидно, что $\overline{SL_\varepsilon} = S\overline{L_\varepsilon}$, поэтому область значений оператора $\overline{SL_\varepsilon}$ также совпадает со всем пространством. Из включения $SL_\varepsilon \subset (SL_\varepsilon)^*$ следует включение $\overline{SL_\varepsilon} \subset \overline{(SL_\varepsilon)^*}$ и в силу замкнутости оператора $(SL_\varepsilon)^*$ имеет место равенство: $\overline{\overline{SL_\varepsilon}} \subset (SL_\varepsilon)^*$. Поскольку, как мы уже показали, область значений оператора $\overline{\overline{SL_\varepsilon}}$ совпадает со всем пространством H, то $\overline{SL_\varepsilon} = (SL_\varepsilon)^*$, следовательно, $(\overline{SL_\varepsilon})^* = (SL_\varepsilon)^{**} = \overline{SL_\varepsilon}$, т.е. замыкание оператора SL_ε самосопряжен в пространстве H.

С другой стороны, оператор $(\overline{L_\varepsilon})^{-1} = \overline{L_\varepsilon^{-1}}$ принадлежит к классу Гильберта – Шмидта, поэтому является вполне непрерывным оператором в пространстве H. В конечном счете, мы получим, что оператор $(\overline{SL_\varepsilon})^{-1}$ самосопряжен и вполне непрерывен, поэтому по теореме Гильберта – Шмидта с его собственных векторов можно составить ортонормированный базис пространства H.

Искомое решение задачи (1)-(2) разлагается в ряд Фурье по этой системе. Коэффициенты Фурье этого разложения после некоторых преобразований дают погранслойное (асимптотическое) разложение решения задачи (1)-(2). Остаток этого разложения оценивается либо через

наименьшее собственное значение оператора SL_ε, либо как следствие полуограниченности оператора L_ε.

Если правая часть уравнения (1) является негладкой функцией, то наш метод обладает некоторыми преимуществами по сравнению с методом последовательных приближений. Дело в том, что гладкость n-го приближения, полученного последним методом, такой же как у $f(x)$, что приводит к большим ошибкам при численной реализации, а гладкость n-ой частичной суммы ряда Фурье бесконечно. Как нам кажется, этот момент играет существенную роль при практической реализации данного метода при конкретных ситуациях.

2. Существование и единственность сильного решения.

Найдем фундаментальные решения однородного уравнения:

$$\varepsilon e' + ae = 0,$$

$$\varepsilon(0) = 0.$$

$$\varepsilon e' = -a\varepsilon, \ \frac{e'}{e} = -\frac{a}{\varepsilon}, \ (\ln e)' = -\frac{a}{\varepsilon},$$

$$\ln e\Big|_0^x = -\int_0^x \frac{a}{\varepsilon}dt = -\frac{a}{\varepsilon}x, \ \ln e(x) - \ln e(0) = -\frac{a}{\varepsilon}x,$$

$$\ln\frac{e(x)}{e(0)} = -\frac{a}{\varepsilon}x, \quad e(x) = e(0)e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} = e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}.$$

Пусть $f(x)$ – непрерывная функция, тогда решения задачи (1)-(2) ищем в виде:

$$y(x,\varepsilon,f) = \int_0^x K(x,t)f(t)dt, \qquad (3)$$

где $K(x,t)$ – пока неизвестная функция. Подставив (3) в (1)-(2), имеем

$$y'(x) = K(x,x)f(x) + \int_0^x \frac{\partial K}{\partial x}f(t)dt,$$

$$\varepsilon y'(x) + ay(x) = \varepsilon K(x,x)f(x) + \int_0^x \varepsilon\frac{\partial K}{\partial x}f(t)dt +$$

$$+\int_0^x aK(x,t)f(t)dt =$$

$$= \varepsilon K(x,x)f(x) + \int_0^x\left[\varepsilon\frac{\partial K}{\partial x} + aK\right]f(t)dt = f(x)$$

Следовательно, надо полагать

$$\varepsilon K(x,x) = 1, \quad \varepsilon\frac{\partial K}{\partial x} + aK = 0,$$

т.е. при каждом фиксированном значении t функция $K(x,t)$ является решением задачи Коши соответствующего однородного уравнения. Нетрудно заметить, что искомой функцией является:

$$K(x,t) = \frac{e(x-t)}{\varepsilon}.$$

В самом деле,

$$\varepsilon K(x,x)\big|_{t=x} = e(0) = 1,$$

$$\varepsilon\frac{\partial e(x-t)}{\partial x} + ae(x-t) = \varepsilon e'(x-t) + ae(x-t) = 0.$$

Таким образом, для любой непрерывной функции $f(x)$ решение задачи Коши (1)-(2) существует и имеет вид:

$$y(x,\varepsilon,f) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x e(x-t)f(t)dt, \qquad (4)$$

где $e(x) = \exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}x\right)$ – есть фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения.

Формулу (4) можно переписать в виде:

$$y(x,\varepsilon,f) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \theta(x-t)e(x-t)f(t)dt, \qquad (5)$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда. Ядро интегрального оператора (5) является ограниченной функцией, поэтому он является ограниченным оператором на линейном многообразии непрерывных функций, а поскольку это многообразие плотно в $L^2(0,1)$, то оператор (5) продолжается на все пространство $L^2(0,1)$ по непрерывности.

Таким образом, область значений замыкания оператора:

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + ay(x), \quad x \in [0,1]$$

$$D(L_\varepsilon) = \{y(x) \in C^1(0,1) \cap C[0,1], \ y(0) = 0\}$$

совпадает со всем пространством H.

Умножив обе части уравнения (1) скалярно на функцию $y(x)$, получим

$$\varepsilon(y',y)+a\cdot\|y\|^2=(f,y).$$

В силу начального условия, имеем:

$$\varepsilon(y',y)=\varepsilon\int_0^1 ydy=\varepsilon\cdot\frac{y^2(x)}{2}\Big|_0^1=\varepsilon\frac{y^2(1)}{2}>0.$$

Следовательно,

$$a\cdot\|y\|^2\le(f,y)\le\|f\|\cdot\|y\|,\quad a\|y\|\le\|f\|=\|L_\varepsilon y\|.$$

Если $f=0$, то из последнего неравенства следует, что $\|y\|=0$, т.е. $y(x)\equiv 0$, тем самым доказана единственность найденного решения и ограниченность обратного оператора, поскольку имеет место неравенство:

$$\|y\|=\|L_\varepsilon^{-1}f\|\le\frac{\|f\|}{a},\quad \|L_\varepsilon^{-1}\|\le\frac{1}{a},$$

Далее из уравнения (1) получим оценку производной найденного решения:

$$\varepsilon y'(x)+ay(x)=f(x),\qquad \varepsilon y'(x)=f(x)-ay(x),$$

$$\varepsilon\|\dot y\|\le\|f\|+a\|y\|\le 2\|f\|,\|\dot y\|\le\frac{2}{\varepsilon}\|f\|,$$

$$\|\dot y\|_1=\left(\|\dot y\|^2+\|y\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\sqrt{\frac{4}{\varepsilon^2}\|f\|^2+\|f\|^2}\le\sqrt{\frac{4}{\varepsilon^2}+1}\cdot\|f\|$$

Следовательно, при каждом фиксированном $\varepsilon>0$ обратный оператор L_ε^{-1} является компактным, более того, он принадлежит классу Гильберта – Шмидта, что является следствием ограниченности ядра интегрального оператора (5).

3. О Фурье представлении решения.

Если оператор S определен формулой:

$$Su(x)=u(1-x),\qquad (6)$$

то оператор SL_ε является симметричным оператором в пространстве H. В самом деле, пусть $u,v\in D(L_\varepsilon)$, тогда

$$(SL_\varepsilon u,v)=(L_\varepsilon u,Sv)=\int_0^1(\varepsilon u'+au)v(1-x)dx=$$

$$=\varepsilon\int_0^1 v(1-x)du+\int_0^1 au(x)v(1-x)dx=$$

$$=\varepsilon v(1-x)u\Big|_0^1+\int_0^1 v'(1-x)u(x)dx+\int_0^1 au(x)v(1-x)dx=$$

$$=\int_0^1 u(x)[v'(1-x)+av(1-x)]dx=(u,SL_\varepsilon v)$$

Из симметричности оператора SL_ε следует симметричность оператора $(SL_\varepsilon)^{-1}$, и поскольку оператор $(SL_\varepsilon)^{-1}$ определен на всем пространстве $L^2(0,1)$, то он является самосопряженным оператором. Таким образом, оператор $(SL_\varepsilon)^{-1}$ самосопряжен и вполне непрерывен, тогда по теореме Гильберта – Шмидта нормированные собственные векторы этого оператора составляют ортонормированный базис пространства $L^2(0,1)$.

ЛЕММА 1. Если $Su(x)=u(1-x)$, то нормированные собственные векторы оператора SL_ε образуют ортонормированный базис пространства H.

ТЕОРЕМА 1. Для сильного решения задачи Коши (1)-(2) имеет место представление:

$$y(x,\varepsilon,f)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(Sf,\varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n(x),\qquad (7)$$

где $\varphi_n(x)$ – собственные векторы (функций), а λ_n $(n=1,2,...)$ – собственные значения оператора SL_ε, где $Su(x)=u(1-x)$,

$$L_\varepsilon y=\varepsilon y'(x)+ay(x),\quad x\in[0,1],\ (1)'$$

$$D(L_\varepsilon)=\{y(x)\in C^1(0,1)\cap C[0,1],\ y(0)=0\}\quad (2)'$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действуя оператором S на обе части уравнения (1), получим $SL_\varepsilon y=Sf$, следовательно,

$$y(x,\varepsilon,f)=(SL_\varepsilon)^{-1}Sf(x),\ SL_\varepsilon\varphi_n=\lambda_n\varphi_n,(n=1,2,...),$$

$$\varphi_n=\lambda_n(SL_\varepsilon)^{-1}\varphi_n,\ (SL_\varepsilon)^{-1}\varphi_n=\frac{\varphi_n}{\lambda_n},$$

$$y(x,\varepsilon,f)=(SL_\varepsilon)^{-1}Sf(x)=y(x,\varepsilon,f)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left((SL_\varepsilon)^{-1}Sf,\varphi_n\right)\cdot\varphi_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(Sf,(SL_\varepsilon)^{-1}\varphi_n\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(Sf,\varphi_n)}{\lambda_n}\cdot\varphi_n(x).$$

Теорема 1 доказана. Она составляет основу нашего метода. В следующем пункте мы выводим погранслойное разложение решения задачи (1)-(2).

4. Вывод погранслойного асимптотического разложения.

ЛЕММА 2. Если $f(x)\in W_2^1[0,1]$, то имеет место формула:

$$y(x,\varepsilon,f)=\frac{f(x)}{a}-\frac{\varepsilon}{a}f(0)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(1)}{\lambda_n}\varphi_n(x)-\frac{\varepsilon}{a}y(x,\varepsilon,f'),\quad(8)$$

где $y(x,\varepsilon,f')$ – есть решение той же самой задачи Коши, но с правой частью $f'(x)$.

ЛЕММА 3. Имеет место формула

$$\varepsilon\cdot\frac{\varphi_n(1)}{\lambda_n}=(\varphi_n,e),\qquad(9)$$

где λ_n – собственные значения, а $\varphi_n(x)$ – собственные функций оператора SL_ε, а $e(x)$ – фундаментальное решение однородного уравнения, т.е.

$$\begin{cases}\varepsilon e'+ae=0,\\ e(0)=1.\end{cases}\qquad(10),(11)$$

ЛЕММА 4. Если $f(x)\in W_2^1[0,1]$, то имеет место формула:

$$y(x,\varepsilon,f)=\frac{f(x)}{a}-\frac{f(0)}{a}e(x)-\frac{\varepsilon}{a}y(x,\varepsilon,f'),\quad(12)$$

где $e(x)$ – фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения, а $y(x,\varepsilon,f')$ – решение той же самой задачи Коши (1)-(2), но с правой частью $f'(x)$.

ТЕОРЕМА 2. Если $a>0$ и $f(x)\in W_2^1[0,1]$, то решение сингулярно возмущенной задачи Коши (1)-(2) удовлетворяет оценке:

$$\left\|y(x,\varepsilon,f)-\frac{f(x)-f(0)e(x)}{a}\right\|\le\frac{\varepsilon\|\dot f\|}{a^2},$$

где $e(x)$ – фундаментальное решение однородного уравнения:

$$\varepsilon e'(x)+ae(x)=0,\qquad(10)$$

$$e(0)=1.\qquad(11)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $a>0$, $f(x)\in W_2^1[0,1]$ и $f(0)=0$, то имеет место также оценка:

$$\left\|y'(x,\varepsilon,f)-\frac{f'(x)-f'(0)e(x)}{a}\right\|\le\frac{\varepsilon\|\dot f\|}{a^2}.\quad(13)$$

Если $f(x)\in W_2^n[0,1]$ и $n>1$, то по формуле (12) можно выводить последующие члены разложения. Например, если $f(x)\in W_2^2[0,1]$, то имеем

$$y(x,\varepsilon,f')=\frac{f'(x)}{a}-\frac{f'(0)}{a}\cdot e(x)-\frac{\varepsilon}{a}y(x,\varepsilon,f''),$$

$$y(x,\varepsilon,f)=\frac{f(x)}{a}-\frac{f(0)}{a}\cdot e(x)-$$

$$-\frac{\varepsilon}{a}\left[\frac{f'(x)-f'(0)e(x)}{a}-\frac{\varepsilon}{a}y(x,\varepsilon,f'')\right]=$$

$$=\frac{f(x)}{a}-\frac{f(0)e(x)}{a}-\frac{[f'(x)-f'(0)e(x)]\varepsilon}{a^2}+\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2y(x,\varepsilon,f'').$$

Теперь воспользуемся математической индукцией, предположим, что имеет место формула:

$$y(x,\varepsilon,f)=\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\frac{\left[f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)e(x)\right]\varepsilon^k}{a^{k+1}}+$$

$$+(-1)^{n-1}\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{n-1}y(x,\varepsilon,f^{(n-1)}),$$

тогда

$$y(x,\varepsilon,f^{(n-1)})=\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(0)e(x)}{a}-\frac{\varepsilon}{a}y(x,\varepsilon,f^{(n)}),$$

поэтому

$$y(x,\varepsilon,f)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{\left[f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)e(x)\right]\varepsilon^k}{a^{k+1}}+$$

$$+(-1)^n\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^n y(x,\varepsilon,f^{(n)}).$$

В силу ранее доказанной априорной оценки имеет место равенство:

$$\left\|y(x,\varepsilon,f^{(n)})\right\|\le\frac{\left\|f^{(n)}(x)\right\|}{a},$$

поэтому

$$\left\| y(x,\varepsilon,f)-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{\left[f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)e(x)\right]\varepsilon^k}{a^{k+1}}\right\| \le \frac{\varepsilon^n}{a^{n+1}}\left\|f^{(n)}(x)\right\|$$

ТЕОРЕМА 3. Если $a>0$, $f(x)\in W_2^n[0,1]$, то решение сингулярно возмущенной задачи Коши (1)-(2) принадлежит пространству $W_2^{n+1}[0,1]$ и удовлетворяет оценке:

$$\left\| y(x,\varepsilon,f)- -\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{\left[f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)e(x)\right]\varepsilon^k}{a^{k+1}}\right\| \le \frac{\varepsilon^n}{a^{n+1}}\left\|f^{(n)}(x)\right\|$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $a>0$, $f(x)\in W_2^n[0,1]$ и $f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0$, то имеет место оценка:

$$\left\| y(x)-\frac{f(x)}{a}\right\|_{n-1} \le \frac{\varepsilon}{a^{21}}\left\|f'(x)\right\|_{n-1},$$

где $\|\cdot\|_{n-1}$ – норма пространства Соболева $W_2^{n-1}[0,1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продифференцировав основное уравнение k – раз, получим $/1\le k\le n-1/$

$$\begin{cases}\varepsilon y^{(k+1)}+ay^{(k)}=f^{(k)}(x),\\ y^{(k)}(0)=0.\end{cases}$$

Тогда в силу формулы (13), имеем:

$$\left\| y^{(k)}(x,\varepsilon,f)-\frac{f^{(k)}(x)}{a}\right\| \le \frac{\varepsilon^2}{a^2}\left\|y(x,\varepsilon,f^{(k+1)})\right\|^2 \le \frac{\varepsilon^2}{a^4}\left\|f^{(k+1)}(x)\right\|^2$$

Просуммировав эти неравенства и извлекая корень квадратный от полученной суммы, имеем:

$$\left\| y(x,\varepsilon,f)-\frac{f(x)}{a}\right\|_{n-1} = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left\| y^{(k)}(x,\varepsilon,f)- -\frac{f^{(k)}(x)}{a}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{\varepsilon}{a^2}\left\|f'(x)\right\|_{n-1}.$$

ЛИТЬЕРАТУРА

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высш.шк., 1990. 200 с.

2. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН, 1957, №5. С. 3-122.

3. *Ахиезер Н.И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., 1966.

Резюме

Бұл еңбекте аргументті ауытқу әдісімен сингуляр әсерленген Коши есебінің: $\varepsilon y'(x)+ay(x)=f(x)$, $a>0$, $f(x)\in W_2^n[0,1]$ шешімінің асимптотикасы зерттелді.

Summary

In this work, the method of deviating argument, received asymptotic expansion of solutions of a singularly perturbed Cauchy problem $\varepsilon y'(x)+ay(x)=f(x)$, $a>0$, $f(x)\in W_2^n[0,1]$.

ЮКГУ им. М.Ауезова
г. Шымкент

Поступила 02.03.2010 г.