

*A. A. ШАРИПБАЕВ, У. М. КАБЫЛБЕКОВА*

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУРООБРАЗОВАНИЯ БЕТОННОЙ СМЕСИ НА ОСНОВЕ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ**

*(Представлена академиком НАН РК М.О. Отелбаевым)*

В данной статье разработана математическая модель структурообразования бетонных изделий и представлена структура условия управляемости и наблюдаемости применительно к прогнозированию физико-механических характеристик по данным параметров начальной стадий твердения.

Внешнее сходство процессов, происходящих при твердении бетонных структур, с теми которые происходят в электрической цепи с сосредоточенными параметрами, позволило в ряде случаев использовать общие идеи для построения модели явления. Известно, что явления, которые изменяются со временем, описывают посредством интегральных, дифференциальных или разностных уравнений. По результатам частотных исследований процесса твердения бетона установлено, что с уменьшением влажности проводимость бетона имеет комплексный характер: в одних случаях она четко выражена во времени, в других на него накладывается процесс разрушения структур [1,8]. Эти обстоятельства позво-

ляют представить процесс структурообразования бетонной смеси в виде некоторой цепи с сосредоточенными параметрами, из активного сопротивления ( $R$ ) и реактивных ( $L$  и  $C$ )[3]. Известно, что электрическую цепь, в которой действуют синусоидальные ЭДС, можно рассчитывать с помощью решения алгебраических уравнений с комплексными переменными, где сопротивления характеризуются комплексными величинами.

Построим дифференциальное уравнение, описывающее процессы в приведенной цепи (Рис.1). Процесс составления дифференциального уравнение обычно начинают с определения уравнений отдельных элементов, при необходимости

учитывая их взаимное влияние [4]. Выразим ток и напряжение на элементах цепи через напряжение на емкостном элементе:

ток в контуре  $i = Cdu/dt$ ;  
напряжение на резистивном элементе  $u_r = ir = rCdu/dt$ ;  
напряжение на индуктивном элемен-

$$\text{те } U_L = \frac{Ldi}{dt} = LCd^2u_c/dt^2$$

Так как  $u_L + u_r + u_C = u_{\text{вх}}$ . То, подставив  $u_L$  и  $u_r$ , соответствующие напряжениям и выражениям, получим

$$LC \frac{d^2u_c}{dt^2} + rC \frac{du_c}{dt} + u_c = u_{\text{вх}} \quad (1)$$

Перейдем в данном выражении от  $u_c$  к  $u_{\text{вых}}$

$$u_{\text{вых}} = \frac{1}{k} u_c;$$

$$\frac{LC}{k} \frac{d^2u_{\text{вых}}}{dt^2} + \frac{rC}{k} \frac{du_{\text{вых}}}{dt} + \frac{1}{k} u_{\text{вых}} = u_{\text{вх}} \quad (2)$$

или

$$\frac{d^2u_{\text{вых}}}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{du_{\text{вых}}}{dt} + \frac{1}{LC} u_{\text{вых}} = \frac{k}{LC} u_{\text{вх}} \quad (3)$$

Заменив  $u_{\text{вх}}$  на  $u$  и  $u_{\text{вых}}$  на  $x$ , запишем дифференциальное уравнение в виде

$$y'' + \frac{r}{L} y' + \frac{1}{LC} y = \frac{k}{LC} x \quad (4)$$

где  $y'$  и  $y''$  – соответственно первая и вторая производные по времени.

Следуя обычному алгоритму, принятому при построении непрерывных марковских моделей [4 и 5], процесс твердения бетона можно характеризовать системой дифференциальных уравнений состояния, наблюдения и управления;

Уравнения состояния твердения бетона для данного момента  $t$  и последующего момента времени  $t + \tau$ , можно представить в виде

$$\bar{x}(t + \tau) = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}, \bar{z}) \quad (5)$$

где,  $\bar{x}$  – вектор переменного состояния, характеризующий требуемое качество бетона: плотность, прочность, морозостойкость, теплостойкость;  $\bar{y}$  – вектор переменных управляющих воздействий, характеризующий минералогический состав вяжущего, химический и зерновой состав заполнителя; количество и активность цемента и отношение В/Ц;  $\bar{w}$  – вектор переменных возмущений (помех), характеризующий разнообразие темпе-

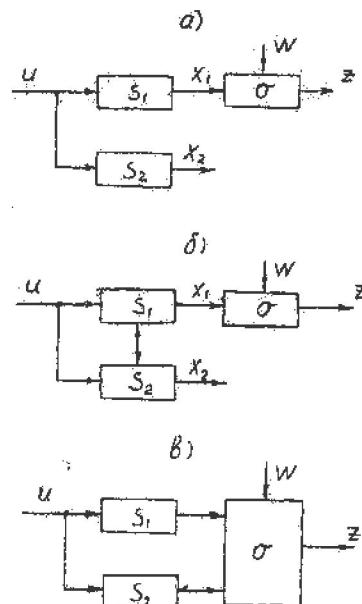


Рис. 1. Электрическая цепь R, L, C, питаемая синусоидальным напряжением  $U = U_m \sin \omega t$

ратурных и влажностных условий твердения бетона;  $\bar{z}$  – вектор наблюдения переменных, характеризующий изменение ХСВ и свободной воды в бетоне.

Часть этих показателей можно отнести к начальным константам (минералогический состав вяжущего, количество и активность цемента и (В/Ц), другие изменения содержания воды в процессе гидратации, изменение прочности, фазовые превращения) – к переменным. На основе Марковской модели [5], функциональную зависимость (5) можно переписать в виде уравнения:

$$x = F(t)_a + G(t)\bar{w}(t) + C(t)\bar{y}(t) \quad (6)$$

где обозначение векторов  $x$ ,  $y$ ,  $w$  тот же смысл, что и выше;  $x$  – производные по времени;  $G(t)$ ,  $C(t)$  – матрицы, которые описывают изменения системы во времени.

Уравнение (6) в некоторых случаях можно решить в общем виде, зависимость  $x(t)$ , при этом представляется функционалом или некоторой функцией времени. Решение дифференциальных уравнений в данном случае усложняется тем обстоятельством, что по технологическим причинам часть входящих величин определяется на более поздних стадиях процесса твердения. Неопределенность поведения системы вносится также наличием случайных возмущений  $W(t)$ . Исходя из предположения, что непосредственное измерение величины  $x$ , входящей в уравнение состояния (5), невозможно из-за наличия ошибок,

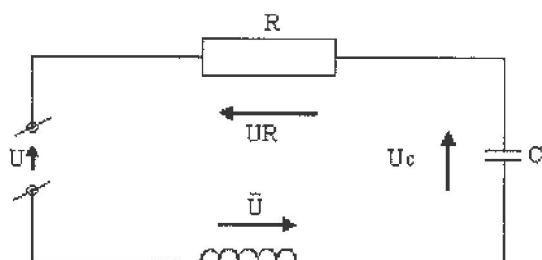


Рис.2. Варианты структуры для Марковской модели вводятся уравнения наблюдения вида:

$$\vec{Z}(t) = H(t)\vec{x}(t) + \vec{E}(t) \quad (7)$$

где  $\vec{Z}(t)$  – вектор непосредственно наблюдаемых величин;  $\vec{E}(t)$  – вектор ошибок;  $H(t)$  – матрица измерений, характеризующая связь наблюдаемых параметров состояния при отсутствии помех. Как правило, эта матрица диагональна, причем ее элементы зависят от чувствительности измерительных приборов, выбора единиц измерения и т.д. Кальман показал, что математические условия управляемости и наблюдаемости сводятся к тому, что наблюдаемая система приводится в структуре, показанной на рис. 2. Система считается полностью управляемой, если управлению поддаются все интересующие параметры (рис.2.а и б). Принципиальная осуществимость управления зависит от возможности наблюдения за результатами управляющих воздействий  $U$ . В частности, система (2.а) не наблюдаема, если целью управления является оптимизация значений вектора  $x_2$ , которые не поддаются наблюдению. Такая система считается в целом не наблюдаемой. С другой стороны, система, показанная на рис.2.б, наблюдаема и управляема, так как, имея информацию о переменном состоянии  $x_1$ , мы получаем в то же время информацию о переменном состоянии  $x_2$ . Наконец, на рис. 2.в показан пример полностью наблюдаемой, но неуправляемой системы.

Отметим, что в отличие от предыдущей модели, при Марковском подходе для выбора уравнения необходимо использовать определенные гипотезы о взаимосвязи отдельных звеньев (подпроцессов), из которых складывается наблюдаемый процесс. Следует заметить что, электрическая цепь на рис.1 представляет колебательное звено, у которого корни характеристического уравнения являются комплексно-сопряженными и представляет собой как бы соединение двух элементов, которые способны запасать энергию и взаимно обмениваться ею [6]. В электрической цепи на (Рис.1) ими являются последовательное соединение активной  $R$ , индуктивной  $L$  и емкостного  $C$  сопротивлений, из которых складывается наблюдаемый процесс и эти обстоятельства свидетельствуют гипотезу о взаимосвязи отдельных звеньев (подпроцессов). [7].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Амирбеков А.А. Моделирование свойств и процессов разрушения легкого бетона. «Архитектура и строительство Узбекистана», № 1с. 1988. 15-17с.
2. Белов В.М., Михайлов И.В. Распределение влаги в бетоне по видам ее связи с твердой фазой. : Физика-химическая механика дисперсных структур. Москва: Наука, 1986. 12-87с.
3. Мансуров Н.Н., Попов В.С. Теоретическая электротехника. Москва: «Энергия», 1978. 72-85 с.
4. Волков Е.А. Численные методы: 2-е изд.-Москва: Наука, 1987. 12-35 с.
5. Пуанкаре А. Качественная теория дифференциальных уравнений. Москва: Физматгиз, 1953. 35-75с.
6. Воронов А.А. Основы теории автоматического регулирования и управления. Москва: Высшая школа», 1977. 167-200с.
7. Кабылбекова У.М. Математическое моделирование кинетики твердения бетонов на легких заполнителях, «Архитектура и строительство Узбекистана», №15 с. 15-17.

## Резюме

Бетон құрылымдарының катаю құрылымдарының математикалық моделі жасалынып, бетонның сонғы сапасын жорамалдау және басқару құрылымдары ұсынылған.

## Summary

In given article is designed mathematical model of the structurization concrete product and is presented structure of the condition to controllability and observed with reference to forecasting physic-mechanical features as of parameter initial stage repeating over and over again.

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева,  
г. Астана

Поступила 05.06.2010 г.