М А Т Е М А Т И К А

УДК 517.956

Т.Т. ШЕРИЯЗДАН

ЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ ЧАПЛЫГИНА

(Представлена академиком НАН РК С.Н. Хариным)

В работе исследуются локальные краевые задачи в областях с отходом от характеристики для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина

При исследовании смешанной задачи M в [1, 2], для уравнения колебания струны изучалась краевая задача с отходом от характеристики, где обращено внимание на исследование таких задач для гиперболических уравнений. Для вырождающихся гиперболических уравнений эта задача на плоскости рассмотрены [3, 4]. Однако, многомерные задачи с отходом от характеристики не изучены.

В данной работе исследуются локальные краевые задачи в областях с отходом от характеристики для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина.

п.1. Постановка задач и результаты. Пусть Db – конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,\ldots, x_m, t)$, ограниченная плоскостью $t = 0$ и при $t > 0$ коноидами

$$K_0 : r = \int_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi,\ 0 \le r \le r_0,\ 0 < r_0 = const < \frac{1}{2},$$

$$K_\beta : \beta(r - r_0) + r_0 = \int_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi,\ r_0 \le r \le r_1,$$

$$K_1 : r = 1 - \int_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi,\ r_1 \le r \le 1,\ 0 \le t \le t_1,$$

где $r =$ SxS– длина вектора $x = (x_1,\ldots, x_m)$, а

$$0 < \beta = const < 1,\ r_1 = \frac{(1 - r_0 + r_0\beta)}{(1+\beta)},$$

$$t_0 : r_0 = \int_0^{t_0} \sqrt{g(\xi)}d\xi,\ t_1 : 1 - r_1 = \int_0^{t_1} \sqrt{g(\xi)}d\xi.$$ Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β, обозначим через S, S_0, S_β, S_1 соответственно.

В области D_β рассмотрим взаимно-сопряженные уравнения

$$g(t)\Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0, \quad (1)$$

$$g(t)\Delta_x \upsilon - \upsilon_{tt} - \sum_{i=1}^m a_i \upsilon_{x_i} - b\upsilon_t + d\upsilon = 0, \quad (1^*)$$

где $g(t)>0$ при $t>0$ и

$g(0) = 0,\ g(t) \in C([0,t_1]) \cap C^2((0,t_1)),\ \Delta_x$ – оператор Лапласа по переменным $x_1,\ldots, x_m,\ m \ge 2$,

$$d(x,t) = c - \sum_{i=1}^m a_{ix_i} - b_t\ .$$

Заметим, что поверхности K_0, K_1 являются характеристиками уравнения (1).

В качестве многомерных аналогов краевых задач с отходом от характеристики рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Найти в области Db решение уравнения (1) из класса $C^1(\overline{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_S = \tau(x),\ u|_{S_0} = \sigma_0(x),\ u|_{S_\beta} = \sigma_\beta(x),$$

или

$$u_t|_S = \nu(x),\ u|_{S_0} = \sigma_0(x),\ u|_{S_\beta} = \sigma_\beta(x).$$

Задача 2. Найти в области D_β решение уравнения (1*) из класса $C^1(\overline{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\upsilon|_S = \tau(x),\ \upsilon|_{S_\beta} = \sigma_\beta(x),\ \upsilon|_{S_1} = \sigma_1(x),$$

или

$$\upsilon_t|_S = \nu(x),\ \upsilon|_{S_\beta} = \sigma_\beta(x),\ \upsilon|_{S_1} = \sigma_1(x).$$

Как отмечено в [4], на плоскости возникает при исследовании трансзвуковых проблем.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \dots, x_m$, t к сферичес ким $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t, r \ge 0, 0 \le \theta_1 < 2\pi, 0 \le \theta_i \le \pi$, $i = 2, 3, \dots, m-1$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \le k \le k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$, $W_2^l(S)$, $l = 0, 1, \dots$ – пространства Соболева.

Имеет место ([5])

Лемма. Пусть $f(r,\theta) \in W_2^l(S)$. Если $l \ge m-1$, то ряд

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta),$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \le l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Введем множество функций

$$B^l(S) = \Big\{f(r,\theta) : f \in W_2^l(S), \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\Big(\|f_n^k(r)\|^2_{C^2((0,1))} + \|f_n^k(r)\|^2_{C^1([0,1])}\Big)\exp 2\left(n^2 + n(m-2)\right) < \infty, l \ge m-1\Big\}.$$

Пусть

$$a_i(x,t), b(x,t), c(x,t) \in W_2^l(D_\beta) \subset C(\overline{D}_\beta),$$

$i = 1, 2, \dots, m$, $l \ge m+1$.

Если $\tau(r,\theta) = r^3\tau^*(r,\theta)$, $\nu(r,\theta) = r^3\nu^*(r,\theta)$, $\sigma_0(r,\theta) = r^2\sigma^*(r,\theta)$, $\tau^*(r,\theta)$, $\nu^*(r,\theta) \in B^l(S)$, $\sigma_0^*(r,\theta) \in B^l(S_0)$, $\sigma_\beta(r,\theta) \in B^l(S_\beta)$, $\sigma_1(r,\theta) \in B^l(S_1)$ то имеет места

Теорема 1. Задача 1 имеет бесчисленное множество решений.

Теорема 2. Однородная задача, соответствующая задаче 1 имеет бесчисленное множество нетривиальных решений.

Теорема 3. Задача 2 однозначно разрешима.

п.2. Постановка задач и результаты. Пусть D – конечная область евклидова пространства E_{m+1}, ограниченная в полупространстве $t > 0$ конической поверхностью $K : t = \varphi(r)$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\varphi(r) \in C^2((0,1)) \cap C^1([0,1])$, $|\varphi'(r)| < 1$ и плоскостью $t = 0$. Тогда $\partial D = K \cup S$ граница области D.

В области D для уравнения (1) в качестве задач Дирихле и Пуанкаре рассмотрим следующую

Задача 3. Найти в области D решение уравнения (1) из класса $C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_S = \tau(x),\ u|_K = \sigma(x),$$

или

$$u_t|_S = \nu(x),\ u|_K = \sigma(x).$$

Пусть $\tau(r,\theta) = r^3\tau^*(r,\theta)$, $\nu(r,\theta) = r^3\nu^*(r,\theta)$, $\sigma(r,\theta) = r^2\delta^*(r,\theta)$, $\tau^*(r,\theta)$, $\nu^*(r,\theta)$, $\sigma^*(r,\theta) \in B^l(S)$.

Тогда справедлива

Теорема 4. Задача 3 имеет единственное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1954. 164 с.

2. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.

3. *Protter M.N.* //Dure Math. J. 1954. Vol. 21. № 1. P. 1-7.

4. *Франкль Ф.И.* Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. 711 с.

5. *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.

Резюме

Чаплыгин операторы бар азған көпөлшемді гиперболалық теңдеуіне арналған сипаттамадан ауытқыған локальды шеттік есептер зерттелген.

Summary

Local marginal problems are researched in work in area with departure from characteristics for degenerating multivariate hyperbolic equations with operator of Chaplygin

Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова, г. Актобе

Поступила 02.12.2009 г.