ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН 2010. № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

Т.Т. ШЕРИЯЗДАН

ЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ ЧАПЛЫГИНА

(Представлена академиком НАН РК С.Н. Хариным)

В работе исследуются локальные краевые задачи в областях с отходом от характеристики для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина

При исследовании смешанной задачи M в [1, 2], для уравнения колебания струны изучалась краевая задача с отходом от характеристики, где обращено внимание на исследование таких задач для гиперболических уравнений. Для вырождающихся гиперболических уравнений эта задача на плоскости рассмотрены [3, 4]. Однако, многомерные задачи с отходом от характеристики не изучены.

В данной работе исследуются локальные краевые задачи в областях с отходом от характеристики для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина.

п.1. Постановка задач и результаты. Пусть Db – конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,\dots, x_m, t)$, ограниченная плоскостью $t = 0$ и при $t > 0$ коноидами

$$K_0 : r = \int_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi,\ 0 \le r \le r_0,\ 0 < r_0 = const < \frac{1}{2},$$

$$K_\beta : \beta(r - r_0) + r_0 = \int_0^t \sqrt{g(\xi)}\,d\xi,\ r_0 \le r \le r_1,$$

$$K_1 : r = 1 - \int_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi,\ r_1 \le r \le 1,\ 0 \le t \le t_1,$$

где r = SxS– длина вектора $x = (x_1,\dots, x_m)$, а

$$0 < \beta = const < 1,\ r_1 = \frac{(1 - r_0 + r_0\beta)}{(1+\beta)},$$

$$t_0 : r_0 = \int_0^{t_0} \sqrt{g(\xi)}d\xi,\ t_1 : 1 - r_1 = \int_0^{t_1} \sqrt{g(\xi)}d\xi.$$ Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β, обозначим через S, S_0, S_β, S_1 соответственно.

В области D_β рассмотрим взаимно-сопряженные уравнения

$$g(t)\Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0, \quad (1)$$

$$g(t)\Delta_x \upsilon - \upsilon_{tt} - \sum_{i=1}^m a_i\upsilon_{x_i} - b\upsilon_t + d\upsilon = 0, \quad (1^*)$$

где $g(t)>0$ при $t>0$ и

$g(0) = 0,\ g(t) \in C([0,t_1]) \cap C^2((0,t_1))$, Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1,\dots, x_m$, $m \ge 2$,

$$d(x,t) = c - \sum_{i=1}^m a_{ix_i} - b_t .$$

Заметим, что поверхности K_0, K_1 являются характеристиками уравнения (1).

В качестве многомерных аналогов краевых задач с отходом от характеристики рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Найти в области Db решение уравнения (1) из класса $C^1(\overline{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_S = \tau(x),\ u|_{S_0} = \sigma_0(x),\ u|_{S_\beta} = \sigma_\beta(x),$$

или

$$u_t|_S = \nu(x),\ u|_{S_0} = \sigma_0(x),\ u|_{S_\beta} = \sigma_\beta(x).$$

Задача 2. Найти в области D_β решение уравнения (1^*) из класса $C^1(\overline{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\upsilon|_S = \tau(x),\ \upsilon|_{S_\beta} = \sigma_\beta(x),\ \upsilon|_{S_1} = \sigma_1(x),$$