УДК 517.956

Т. Т. ШЕРИЯЗДАН

ЗАДАЧА ДАРБУ С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Доказана однозначная разрешимость задачи Дарбу с отходом от характеристики для многомерного волнового уравнения.

В [1, 2] уравнения колебания струны изучалась задача Дарбу с отходом от характеристики, где обращено внимание на изучение таких задач для гиперболических уравнений. Многомерные аналоги этих задач для волнового уравнения предложены в [3].

Пусть D_β – конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,...,x_m,t)$, ограниченная плоскостью $t=0$ и при $t>0$ конусами $\Gamma_0: r=t, 0\le r_0\le r_0$, $0<r_0=const<\frac{1}{2}$, $\Gamma_\beta:\beta(r-r_0)+r_0=t,\ r_0\le r\le r_1$, $\Gamma_1: r=1-t,\ r_1\le r\le 1$, где $r=|x|$ – длина вектора $x=(x_1,\ldots,x_m)$, а $0<\beta=const<1$, $r_1=(1-r_0+r_0\beta)/(1+\beta)$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β обозначим через S, S_0, S_β, S_1 соответственно.

В области D_β рассмотрим многомерное волновое уравнение

$$\Delta_x u-u_{tt}=0, \qquad (1)$$

где Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1,\ldots,x_m$, $m\ge 2$.

В качестве многомерного аналога задачи Дарбу с отходом от характеристики рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Найти в области D_β решение уравнения (1) из класса $C(\overline{D}_\beta)\cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_S=\tau(x),\quad u|_{S_\beta}=\sigma_\beta(x),\quad u|_{S_1}=\sigma_1(x), \qquad (2)$$

или

$$u_t|_S=\nu(x),\quad u|_{S_\beta}=\sigma_\beta(x),\quad u|_{S_1}=\sigma_1(x), \qquad (3)$$

которая как отмечена в [4] возникает при исследовании трансзвуковых проблем.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,\ldots,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,\ldots,\theta_{m-1},t,\ r\ge 0,\ 0\le\theta_i<2\pi,\ 0<\theta_{m-1}<\pi$, $i=2,3,\ldots,m-2$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка $n, 1\le k\le k_n, (m-2)!n!k_n=(n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta=(\theta_1,...,\theta_{m-1})$, $W_2^l(S)$, $l=0,1,...$ – пространства Соболева.

Имеет место ([5])

Лемма. Пусть $f(r,\theta)\in W_2^l(S)$. Если $l\ge m-1$, то ряд

$$f(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (4)$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p\le l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Через $\overline{\tau}_n^k(r), \overline{\nu}_n^k(r), \overline{\sigma}_{\beta n}^k(r), \overline{\sigma}_{1n}^k(r)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (4), соответственно функций $\tau(r,\theta), \nu(r,\theta), \sigma_\beta(r,\theta), \sigma_1(r,\theta)$.

Введем множество функций

$$B^l(S)=\Big\{f(r,\theta): f\in W_2^l(S),\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\Big(\big\|f_n^k(r)\big\|^2_{C^2((0,1))}+$$

$$+\big\|f_n^k(r)\big\|^2_{C^1([0,1])}\Big)\cdot\exp 2\left(n^2+n(m-2)\right)<\infty,\ l\ge m-1\Big\}$$

Пусть $\tau(r,\theta)=r\tau^*(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)=r\nu^*(r,\theta)$, $\tau^*(r,\theta)$, $\nu^*(r,\theta)\in B^l(S)$, $\sigma_\beta(r,\theta)\in B^l(S_\beta)$, $\sigma_1(r,\theta)\in B^l(S_1)$.

Тогда справедлива

Теорема. Задача 1 однозначна разрешима.

Доказательство. Сначала рассмотрим задачу (1), (2). В сферических координатах уравнения (1) имеет вид ([5]):

$$u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u-u_{tt}=0, \qquad (5)$$

$$\delta=-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{q_j\sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta\cdot\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),$$

$$q_1=1,\ q_j=\left(\sin\theta_1\cdot\ldots\cdot\sin\theta_{j-1}\right)^2,\ j>1.$$

Так как искомое решение задачи (1), (2) принадлежит классу $C(\overline{D}_\beta)\cap C^2(D_\beta)$, то его можно искать в виде:

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\overline{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (6)$$

где $\overline{u}_n^k(r,t)$ – функции, подлежащие определению. Подставляя (6) в (5), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ ([5]), получим

$$\overline{u}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\overline{u}_{nr}^k-\overline{u}_{ntt}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\overline{u}_n^k=0,\ \lambda_n=$$

$$=n(n+m-2),\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots \qquad (7)$$

При этом краевые условия (2), (3) с учетом леммы, соответственно запишутся в виде:

$$\overline{u}_n^k(r,0)=\overline{\tau}_n^k(r),\ 0\le r\le 1,$$

$$\overline{u}_n^k(r,\beta(r-r_0)+r_0)=\overline{\sigma}_{\beta n}^k(r),\ r_0\le r\le r_1,$$

$$\overline{u}_n^k(r,1-r)=\overline{\sigma}_{1n}^k(r), \qquad (8)$$

$$r_1\le r\le 1,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots$$

$$\overline{u}_{nt}^k(r,0)=\overline{\nu}_n^k(r),\ 0\le r\le 1,$$

$$\overline{u}_n^k(r,\beta(r-r_0)+r_0)=\overline{\sigma}_{\beta n}^k(r),\ r_0\le r\le r_1,$$

$$\overline{u}_n^k(r,1-r)=\overline{\sigma}_{1n}^k(r),$$

$$r_1\le r\le 1,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots \qquad (9)$$

Произведя замену переменной по формуле $\overline{u}_n^k(r,t)=r^{(1-m)/2}\cdot u_n^k(r,t)$ и положив затем $\xi=(r+t)/2$, $\eta=(r-t)/2$, из (7) будем иметь

$$u_{n\xi\eta}^k+\frac{\left[(m-1)(3-m)-4\lambda_n\right]}{4(\xi+\eta)^2}u_n^k=0, \qquad (10)$$

причем условие (8) для функций $u_n^k(\xi,\eta)$ примет вид

$$u_n^k(\eta,\eta)=\tau_n^k(\eta),\ 0\le\eta\le\frac{1}{2},$$

$$u_n^k\left(\frac{\eta}{\alpha}+\xi_0,\eta\right)=\sigma_{\beta n}^k(\eta),\ 0\le\eta\le\eta_0, \qquad (11)$$

$$v_n^k\left(\frac{1}{2},\eta\right)=\sigma_{1n}^k(\eta),\ \eta_0\le\eta\le\frac{1}{2},\ 0<\alpha=\frac{1-\beta}{1+\beta}<1,$$

$$\tau_n^k(\eta)=(2\xi)^{(m-1)\backslash 2}\cdot\overline{\tau}_n^k(2\eta),\ \sigma_{\beta n}^k(\eta)=$$

$$=\left(\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\eta+\xi_0\right)^{(m-1)/2}\cdot\overline{\sigma}_{\beta n}^k\left(\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\eta+\xi_0\right),$$

$$\sigma_{1n}^k(\eta)=\left(\frac{1}{2}+\eta\right)^{(m-1)/2}\overline{\sigma}_{1n}^k\left(\frac{1}{2}+\eta\right),$$

$$\xi_0=r_0,\ \eta_0=\frac{\alpha}{2}-\alpha\xi_0>0,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots$$

Используя общее решение уравнения (10) ([1]), в [6, 7] показано, что решение задачи Коши для уравнения (10) имеет вид

$$u_n^k(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\tau_n^k(\eta)R(\eta,\eta;\,\xi,\eta)+$$
$$+\frac{1}{2}\tau_n^k(\xi)R(\xi,\,\xi;\,\xi,\eta)+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_\eta^\xi\Big[\nu_n^k(\xi_1)R(\xi_1,\xi_2;\,\xi,\eta)-$$
$$-\tau_n^k(\xi_1)\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\,\xi,\eta)\Big|_{\xi_1=\eta_1}\Big]d\xi_1, \quad (12)$$

где $R(\xi_1,\eta_1;\,\xi,\eta)=$ $=P_\mu\left[\dfrac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi_1\eta_1+\xi\eta)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\right]$ – функция Римана уравнения (10) ([8]), а $P_\mu(z)$ – функция Лежандра, $\mu=n+(m-3)/2$, $\nu_n^k(\xi_1)=\dfrac{\partial u_n^k}{\partial N}\Big|_{\xi_1=\eta_1}=$ $=\left(\dfrac{\partial\xi_1}{\partial N^1}\dfrac{\partial u_n^k}{\partial\eta_1}+\dfrac{\partial\eta_1}{\partial N^1}\dfrac{\partial u_n^k}{\partial\xi_1}\right)\Big|_{\xi_1=\eta_1}$, N^1 – нормаль к прямой $\xi=\eta$ в точке (ξ_1,η_1), направленная в сторону полуплоскости $\eta\le\xi$.

Из (12) при $\xi=\dfrac{\eta}{\alpha}+\xi_0$ и $\xi=\dfrac{1}{2}$, используя краевое условие (11) получим интегральные уравнения первого рода

$$g_n^k(\eta)=\int_\eta^{\frac{\eta}{\alpha}+\xi_0}\nu_n^k(\xi_1)P_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\eta\left(\frac{\eta}{\alpha}+\xi_0\right)}{\xi_1\left(\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\eta+\xi_0\right)}\right]d\xi_1,$$
$$0\le\eta\le\eta_0,$$

$$\psi_n^k(\eta)=\int_\eta^{\frac{1}{2}}\nu_n^k(\xi_1)P_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\frac{\eta}{2}}{\xi_1\left(\frac{1}{2}+\eta\right)}\right]d\xi_1,\ \eta_0\le\eta\le\frac{1}{2},$$

где

$$\sqrt{2}\,g_n^k(\eta)=2\sigma_{\beta n}^k(\xi)-\tau_n^k(\eta)-\tau_n^k\left(\frac{\eta}{\alpha}+\xi_0\right)+$$
$$+\frac{(\eta(1-\alpha)-\alpha\xi_0)}{((1+\alpha)\eta+\alpha\xi_0)}\int_\eta^{\frac{\eta}{\alpha}+\xi_0}\frac{\tau_n^k(\xi_1)}{\xi_1}\times$$
$$\times P_\mu^{/}\left[\frac{\xi_1^2+\eta\left(\frac{\eta}{\alpha}+\xi_0\right)}{\xi_1\left(\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\eta+\xi_0\right)}\right]d\xi_1,$$

$$\sqrt{2}\,\psi_n^k(\eta)=2\sigma_{\beta n}^k(\eta)-\tau_n^k(\eta)-$$
$$-\tau_n^k\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{(1-2\eta)}{(1+2\eta)}\int_\eta^{\frac{1}{2}}\frac{\tau_n^k(\xi_1)}{\xi_1}P_\mu^{/}\left[\frac{\xi_1^2+\frac{1}{2}\eta}{\xi_1\left(\frac{1}{2}+\eta\right)}\right]d\xi_1,$$

которые дифференцированием сводятся соответственно к следующему функционально-интегральному уравнению

$$\nu_n^k(\eta)-\frac{1}{\alpha}\nu_n^k\left(\frac{\eta}{\alpha}+\xi_0\right)=h_n^k(\eta),\ 0\le\eta\le\eta_0, \quad (13)$$

к интегральному уравнению Вольтера второго рода

$$\nu_n^k(\eta)=\int_\eta^{\frac{1}{2}}\nu_n^k(\xi_1)\frac{(1-4\xi_1^2)}{\xi_1(1+2\eta)^2}P_\mu^{/}\left[\frac{\xi_1^2+\frac{1}{2}\eta}{\xi_1\left(\frac{1}{2}+\eta\right)}\right]d\xi_1-$$
$$-\sqrt{2}\frac{d\psi_n^k}{d\eta},\ \eta_0\le\eta\le\frac{1}{2}, \quad (14)$$

$$h_n^k(\eta)=\int_\eta^{\frac{\eta}{\alpha}}\nu_n^k(\xi_1)\frac{\left(\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{\eta^2}{\alpha}-\xi_1^2\right)+\frac{2\eta\xi_0}{\alpha}\right)}{\xi_1\left(\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\eta+\xi_0\right)}\times$$
$$\times P_\mu^{/}\left[\frac{\xi_1^2+\eta\left(\frac{\eta}{\alpha}+\xi_0\right)}{\xi_1\left(\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\eta+\xi_0\right)}\right]d\xi_1.$$

В [7, 9] показано, что уравнение (13) имеет единственное решение.

Следовательно, ряд

$$u(r,\theta,t)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} r^{(1-m)/2}u_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta) \qquad (15)$$

является решением задачи (1), (2), где функции $u_n^k(r,t)$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,...$ находятся из (12), в которой $\nu_n^k(\xi)$ определяются из уравнений (13) и (14).

Теперь рассмотрим задачу (1), (3) и ее решение также будем искать в виде (6). Тогда, как в случае задачи (1), (2), функции $u_n^k(\xi,\eta)$ будут удовлетворять уравнению (10), при этом условие (9) запишется в виде

$$\frac{\partial u_n^k}{\partial N}\Big|_{\xi=\eta}=\nu_n^k(\eta),\ 0\le\eta\le\frac{1}{2},$$

$$u_n^k\left(\frac{\eta}{\alpha}+\xi_0,\eta\right)=\sigma_{\beta n}^k(\eta),\ 0\le\eta\le\eta_0, \qquad (16)$$

$$u_n^k\left(\frac{1}{2},\eta\right)=\sigma_{1n}^k(\eta),\ \eta_0\le\eta\le\frac{1}{2},$$

$$k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,...$$

$$\nu_n^k(\eta)=\sqrt{2}(2\eta)^{(m-1)/2}\nu_n^k(2\eta).$$

Далее, из (12) при $\xi=\frac{\eta}{\alpha}+\xi_0$ и $\xi=\frac{1}{2}$, с учетом (16), получим следующее интегральное уравнение Вольтера второго рода

$$\tau_n^k(\eta)=\int_{\eta}^{\frac{1}{2}}\tau_n^k(\xi_1)\frac{(1-2\eta)}{(1+2\eta)}\times$$

$$\times P_\mu^{/}\left[\frac{\xi_1^2+\frac{\eta}{2}}{\left(\frac{1}{2}+\eta\right)\xi_1}\right]d\xi_1+\psi_n^k(\eta),\ \eta_0\le\eta\le\frac{1}{2}, \qquad (17)$$

и функционально-интегральное уравнение вида

$$\tau_n^k(\eta)+\tau_n^k\left(\frac{\eta}{\alpha}\right)= \qquad (18)$$

$$=g_n^k(\eta)+\int_{\eta}^{\frac{\eta}{\alpha}+\xi_0}\tau_n^k(\xi_1)G_n(\xi,\xi_1)d\xi_1,\ 0\le\eta\le\eta_0,$$

которое однозначно разрешимо ([7,9)]. Здесь

$$\psi_n^k(\eta)=2\sigma_{1n}^k(\eta)-\sigma_{1n}^k\left(\frac{1}{2}\right)-$$

$$-\sqrt{2}\int_{\eta}^{\frac{1}{2}}\nu_n^k(\xi_1)P_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\frac{\eta}{2}}{\xi_1\left(\frac{1}{2}+\eta\right)}\right]d\xi_1,$$

$$g_n^k(\eta)=2\sigma_{\beta n}^k(\eta)-$$

$$-\sqrt{2}\int_{\eta}^{\frac{\eta}{\alpha}+\xi_0}\nu_n^k(\xi_1)P_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\eta\left(\frac{\eta}{\alpha}+\xi_0\right)}{\xi_1\left(\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\eta+\xi_0\right)}\right]d\xi_1,$$

$$G_n(\xi,\xi_1)=$$

$$=\frac{(\eta(1-\alpha)+\alpha\xi_0)}{((1+\alpha)\eta+\alpha\xi_0)}P_\mu^{/}\left[\frac{\xi_1^2+\eta\left(\frac{\eta}{\alpha}+\xi_0\right)}{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\eta+\xi_0}\right].$$

Таким образом, функция (15) является решением задачи (1), (3), где $u_n^k(r,t)$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,...$ определяются из (12), в которой $\tau_n^k(\xi)$ находится из уравнений (17) и (18).

Учитывая ограничения на заданные функции $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, $\sigma_\beta(r,\theta)$, $\sigma_1(r,\theta)$, аналогично [6, 7], можно показать, что полученное решение $u(r,\theta,t)$ (15) принадлежит искомому классу.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 164 с.

2. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.

3. *Protter M.H.* // J. Rational Mech. and Analysis. 1954. V. 3. N 4. P. 435-446.

4. *Франкль Ф.И.* Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. 711 с.

5. *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.

6. *Алдашев С.А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Ғылым, 1994. 170 с.

7. *Алдашев С.А.* Выражающиеся многомерные гиперболические уравнения. Орал: ЗКАТУ, 2007. 139 с.

8. *Copson E.T.* // J. Rath. Mech. And AnaL. 1958.P. 324-328.

9. *Алдашев С.А.* // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. наук. 2007. №3. С. 15-19.

Резюме

Көп өлшемді толқын теңдеуіне арналған сипаттамадан ауытқыған Дарбу есебінің шешімі бар және жалғыздығы дәлелденген.

Summary

In work is proved unambiguous solubility of the problem of Darbu with departure from characteristics for multivariate wave equation.

Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова

Поступила 3.11.08г.