УДК 521.3+629.195.1

М.Д. ШИНИБАЕВ, А.М. ТАСКУЛОВА, К.С. НУРСЕИТОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КЕПЛЕРОВСКИХ ОСКУЛИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ ВТОРОЙ ЗАДАЧИ ХИЛЛА

Предлагается метод решения второй задачи Хилла в кеплеровских оскулирующих элементах.

Создавая теорию движения Луны Г.В.Хилл предложил два способа построения промежуточной орбиты Луны. Первый способ был опубликован в 1878 году [1]. Он был заложен в основу теории движения Луны Е.В.Брауном [2]. Второй способ был опубликован в 1897 году [3] и до 1960 года не был использован. В 1960 году профессор МГУ Б.М.Щиголев [4] выполнил классификацию типов движений пробного тела в этой задаче и стало ясно, что решение задачи можно использовать в качестве промежуточной орбиты в теории движения спутников Земли.

В статье предлагается новый приближенный метод решения второй задачи Хилла в кеплеровских оскулирующих элементах.

Силовая функция Хилла имеет вид:

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}\nu r^2 + \frac{1}{2}(\nu' - \nu)z^2 \qquad (1)$$

здесь μ - произведение постоянной тяготения на сумму масс центрального тела и спутника, ν и ν' - постоянные коэффициенты, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, x, y, z - координаты спутника относительно планетоцентрических координат.

Выражение (1) аппроксимирует силовую функцию далекого спутника в поле тяготения центрального шарообразного твердого тела постоянной массы и внешнего тела, например в системе Земля – спутник – Луна.

Запишем уравнения Лагранжа для кеплеровских оскулирующих элементов [5]:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dP}{dt} = 2\sqrt{\frac{P}{\mu}}\frac{\partial R}{\partial \omega}, \frac{de}{dt} = -\frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu P}}\frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{P}{\mu e}\frac{\partial R}{\partial \tau},\\
&\frac{di}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{\mu P}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \lambda} + \frac{\cos i}{\sqrt{\mu P}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \omega}, \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{\mu P}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i},\\
&\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\cos i}{\sqrt{\mu P}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i} - 2\sqrt{\frac{P}{\mu}}\frac{\partial R}{\partial P} + \frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu P}}\frac{\partial R}{\partial e}, \frac{d\tau}{dt} = \frac{P}{\mu e}\frac{\partial R}{\partial e},
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

здесь $P = a(1-e^2)$ - параметр орбиты; a - большая полуось эллипса; e - эксцентриситет,

ω - аргумент перицентра; R - пертурбационная функция, которая в нашем случае определена выражением

$$R = \frac{1}{2}\nu r^2 + \frac{1}{2}(\nu' - \nu)z^2; \qquad (3)$$

τ - время прохождения через перицентр; i - наклон орбиты; λ - долгота восходящего узла;

Далее в случае эллиптического типа движения в соответствии с общей теорией имеем:

$$M = n(t - t_0) + M_0, E - e\sin E = M, tg\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}tg\frac{1}{2} \qquad (4)$$

$$r = \frac{P}{1 + e\cos\theta}, u = \theta + \omega, M = n(t - \tau), \qquad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}
x &= r(\cos u\cos\lambda - \sin u\sin\lambda\cos i),\\
y &= r(\cos u\sin\lambda - \sin u\cos\lambda\cos i),\\
z &= r\sin u\sin i,
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

где M – средняя аномалия, E – эксцентрическая аномалия, θ - истинная аномалия, u - аргументы широты

Имея в виду (4)-(5) перепишем (3) в следующем виде

$$R = \frac{1}{2}\nu\frac{P^2}{(1 + e\cos\theta)^2} +$$

$$+\frac{1}{2}(\nu' - \nu)\sin^2 i \cdot \sin^2(\theta + \omega) \cdot \frac{P^2}{(1 + e\cos\theta)^2} \qquad (7)$$

Используя (7) вычислим частные производные входящие в (2):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial R}{\partial \omega} = (\nu' - \nu)\sin^2 i \cdot P^2 \cdot \frac{\sin(\theta+\omega)\cos(\theta+\omega)}{(1 + e\cos\theta)^2}, \frac{\partial R}{\partial \tau} = 0,\\
&\frac{\partial R}{\partial \lambda} = 0, \frac{\partial R}{\partial P} = \frac{2R}{P}, \frac{\partial R}{\partial i} = \frac{\sin^2(\theta+\omega)}{(1 + e\cos\theta)^2}(\nu' - \nu)P^2\sin i \cdot \cos i,\\
&\frac{\partial R}{\partial e} = P^2\left[\nu + (\nu' - \nu)\sin^2 i\sin^2(\theta+\omega)\right]\frac{\cos\theta}{(1 + e\cos\theta)^3}
\end{aligned} \qquad (8)$$

Возмущающее ускорение (пертурбационная функция) R мало по сравнению с величиной ньютоновского ускорения $\frac{\mu\bar{r}}{r^3}$, поэтому величины $P, e, \omega, \lambda, i, \tau$ изменяются сравнительно медленно и их в первом приближении можно считать величинами постоянными. Обозначим через $\tilde{P}, \tilde{e}, \tilde{\omega}, \tilde{\lambda}, \tilde{i}, \tilde{\tau}$ значения оскулирующих элементов в начальной точке, определяемой значением времени $t = t_0$.

Введем еще обозначения для возмущений этих элементов при дальнейшем движении по орбите $\Delta P, \Delta e, \Delta\omega, \Delta\lambda, \Delta\tau$.

При этом оскулирующие элементы фактической орбиты в соответствии с [6] можно представить в следующем виде

$$\left.\begin{aligned} &P(t) = \tilde{P} + \Delta P, e = \tilde{e} + \Delta e, \omega(t) = \tilde{\omega} + \Delta\omega, \\ &\lambda_T = \tilde{\lambda} + \Delta\lambda, i(t) = \tilde{i} + \Delta i, \tau(t) = \tilde{\tau} + \Delta\tau, \tilde{\tau} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Используя (8), (9) и интеграл площадей

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = c = const$$

перейдем в уравнениях (2) к независимой переменной θ:

$$\frac{d(\Delta P)}{d\theta} = 2(\nu' - \nu)\sin^2\tilde{i}\,\tilde{P}^4 \sin(\theta + \tilde{\omega})\cos(\theta + \tilde{\omega}) *$$

$$* \mu^{-1}(1 + \tilde{e}\cos\theta)^{-4},$$

$$\frac{d(\Delta e)}{d\theta} = -$$

$$-\frac{(\tilde{e}^2 - 1)\tilde{P}^2(\nu' - \nu)}{\tilde{e}\mu(1 + \tilde{e}\cos\theta)^4}\sin^2\tilde{i}\,\sin(\theta + \tilde{\omega})\cos(\theta + \tilde{\omega}),$$

$$\frac{d(\Delta i)}{d\theta} = \frac{\tilde{P}^3(\nu' - \nu)}{\mu(1 + \tilde{e}\cos\theta)^4}\sin\tilde{i}\,\cos\tilde{i}\,\sin(\theta + \tilde{\omega})\cos(\theta + \tilde{\omega}),$$

$$\frac{d(\Delta\lambda)}{d\theta} = \frac{\tilde{P}^3(\nu' - \nu)}{\mu(1 + \tilde{e}\cos\theta)^4}\cos\tilde{i}\,\sin^2(\theta + \tilde{\omega}), \quad (10)$$

$$\frac{d(\Delta\omega)}{d\theta} = \frac{-\tilde{P}^3(\nu' - \nu)}{\mu(1 + \tilde{e}\cos\theta)^4}\cos\tilde{i}\,\sin^2(\theta + \tilde{\omega}) -$$

$$-\frac{2\tilde{P}^3}{\mu(1 + \tilde{e}\cos\theta)^4}\left[\nu + (\nu' - \nu)\sin^2\tilde{i}\cdot\sin^2(\theta + \tilde{\omega})\right] -$$

$$-\frac{\tilde{P}^3(1 - \tilde{e}^2)}{\tilde{e}\mu}\cdot\frac{\cos\theta}{(1 + \tilde{e}\cos\theta)^5}\left[\nu + (\nu' - \nu)\sin^2\tilde{i}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sin^2(\theta + \tilde{\omega})\right],$$

$$\frac{d\tau}{d\theta} = \frac{-\tilde{P}^5}{\tilde{e}\mu\sqrt{\mu P}}\frac{\cos\theta}{(1 + \tilde{e}\cos\theta)^5}\left[\nu + \right.$$

$$\left. + (\nu' - \nu)\sin^2\tilde{i}\cdot\sin^2(\theta + \tilde{\omega})\right]$$

Таким образом, задача сведена к следующим квадратурам:

$$\Delta P = \frac{2\tilde{P}^4}{\mu}(\nu' - \nu)\sin^2\tilde{i}\cdot J_1,$$

$$\Delta e = \frac{(\tilde{e}^2 - 1)(\nu' - \nu)}{\tilde{e}\mu}\tilde{P}^3\sin^2\tilde{i}\,J_1,$$

$$\Delta i = \frac{\tilde{P}^3(\nu' - \nu)}{\mu}\sin\tilde{i}\,\cos\tilde{i}\,J_1, \Delta\lambda = \frac{\tilde{P}^3(\nu' - \nu)}{\mu}\cos\tilde{i}\,J_2,$$

$$\Delta\omega = \frac{\tilde{P}^3(\nu' - \nu)}{\mu}\cos\tilde{i}\,J_2 - \frac{2\tilde{P}^3\nu}{\mu}J_3 + \frac{\tilde{P}^3(\nu' - \nu)}{\mu}\sin^2\tilde{i}\,J_2 +$$

$$+ \frac{\tilde{P}^3(\tilde{e}^2 - 1)}{\tilde{e}\mu}\nu J_4 + \frac{\tilde{P}^3(\tilde{e}^2 - 1)}{\tilde{e}\mu}(\nu' - \nu)\sin^2\tilde{i}\cdot J_5, \quad (11)$$

$$\Delta\tau = \tau = \frac{\tilde{P}^5\nu}{\tilde{e}\mu\sqrt{\mu\tilde{P}}}J_4 + \frac{\tilde{P}^5(\nu' - \nu)}{\tilde{e}\mu\sqrt{\mu\tilde{P}}}\sin^2\tilde{i}\,J_5$$

где

$$J_1 = \int_0^\theta \frac{\sin(\theta + \tilde{\omega})\cos(\theta + \tilde{\omega})}{(1 + \tilde{e}\cos\theta)^4}d\theta, J_2 =$$

$$= \int_0^\theta \frac{\sin^2(\theta + \tilde{\omega})}{(1 + \tilde{e}\cos\theta)^4}d\theta, J_3 = \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + \tilde{e}\cos\theta)^4},$$

$$J_4 = \int_0^\theta \frac{\cos\theta}{(1 + \tilde{e}\cos\theta)^5}d\theta, J_5 = \int_0^\theta \frac{\cos\theta\sin^2(\theta + \tilde{\omega})}{(1 + \tilde{e}\cos\theta)^5}d\theta,$$

Используя (9) и (11) при заданных начальных условиях

$$t = 0,\ P = \tilde{P},\ e = \tilde{e},\ \omega = \tilde{\omega},$$

$$\tau = \tilde{\tau},\ \lambda = \tilde{\lambda},\ i = \tilde{i}$$

можно найти оскулирующие элементы спутника в нецентральном поле тяготения центрального и внешнего тела в окрестности времени t_0

Работа выполнена в рамках ПФИ, шифр Ф-0351.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hill G.W.* Researches in the Lunar theory. – Journ. of Math. Pure and Appl.,1878,Vol.1.

2. *Brown E.W.* Met.Roy.Astron.Soc.59.1,1909.

3. *Hill G.W.* On intermediary orbits in the Lunar theory.-Astronomical Journal.18.1897.

4. *Щиголев Б.М.* О промежуточных орбитах Хилла в задаче трех тел. – Труды ГАИШ, 1960, т28.

5. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.:,1968.

6. *Эльясберг П.Е.* Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука,1965.

Резюме

Екінші Хиллдың есебінде кеплердің өзгертетін элементтерін табуының әдісі беріледі.

Summary

The method of solving the second Hill's problem in kepler's osqulating elements is considered.

Астрофизический институт
им. В.Г.Фесенкова МОН РК,
г. Алматы,
Международный гуманитарно-технический университет,
г. Шымкент

Поступила 15.06.2008 г.