УДК 521.3+629.195.1

М.Д.ШИНИБАЕВ[1], А.А.БЕКОВ[2], Х.А.АШИРБАЕВ[3], Н.М.УТЕНОВ[3],А.А.АБЖАПБАРОВ[3], Б.ТИЛЕУБЕРДИЕВ[1]

НОВЫЙ МЕТОД ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТ ПРОБНОГО ТЕЛА В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ ХИЛЛА В СЛУЧАЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ДВИЖЕНИЯ

([1]Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, г. Шымкент;
[2]Институт космических исследований им. У.М.Султангазина АО «НЦКИТ», г. Алматы;
[3]Южно-Казахстанский государственный университет им. М.О.Ауезова, г. Шымкент

Предлагается новый метод определения полярных координат пробного тела в плоской задаче Хилла в случае гиперболического типа движения.

Дифференциальные уравнения движения пробного тела в поле тяготения Хилла имеют вид [1]

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2w}{d\vartheta^2}+\left(1+\frac{\alpha}{w^4}\right)w-\frac{1}{(1+s^2)^{3/2}}=0,\\&\frac{d^2s}{d\vartheta^2}+\left(1+\frac{\beta}{w^4}\right)s=0,\\&\frac{dt}{d\vartheta}=\frac{\rho^2}{c},\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

где $\alpha=\frac{\nu c^6}{\mu^4}$, $\beta=\frac{(\nu-\nu')c^6}{\mu^4}$, $\frac{1}{\rho}=w\frac{\mu}{c^2}$, $s=\frac{z}{\rho}$, $\rho^2=x^2+y^2$, α и β – постоянные параметры, c и h – постоянные интеграла площадей и интеграла энергии, μ – произведение постоянной тяготения на сумму масс пробного и центрального тела s – тангенс широты, ϑ – истинная долгота, w – переменная Хилла.

Рассмотрим движение пробного тела в основной плоскости по орбите гиперболического типа, в этом случае $s\neq 0,\ s^2\approx 0$ и первое дифференциальное уравнение из (1) допускает понижение порядка, т.е.

$$d\vartheta=\frac{wdw}{\sqrt{-w^4+2w^3+Hw^2+\alpha}},\tag{2}$$

где постоянная интегрирования H определена выражением

$$H=\frac{2hc^2}{\mu^2},\tag{3}$$

в случае гиперболического типа движения

$$G_4(w)=-w^4+2w^3+Hw^2+\alpha>0,\ \alpha>0,\ \ H>0\tag{4}$$

и подкоренной полином имеет один положительный корень α_1, один отрицательный корень α_2 и два комплексно сопряженных корня [2]

$$\alpha_3=b_1+ic_1 \text{ и } \alpha_4=b_1-ic_1,\ b_1>0,\ c_1>0.$$

Перейдем от (2) к нормальной форме Лежандра [3], учитывая, что $G_4(w)>0$ только на одном интервале $\alpha_2<w<\alpha_1$, тогда имеем

$$d\vartheta=\mu_*\frac{wd\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\ 0<k^2<1,\ k=\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\tag{5}$$

$$w = \frac{\alpha_1 \cos\theta_1 + \alpha_2 \cos\theta_2 \cdot \mathrm{tg}^2 \dfrac{\varphi}{2}}{\cos\theta_1 + \cos\theta_2 \cdot \mathrm{tg}^2 \dfrac{\varphi}{2}},\ \theta_1 < \frac{\pi}{2},\ \theta_2 < \frac{\pi}{2}, \tag{6}$$

$$\mu_* = -\frac{1}{c_1}\sqrt{\cos\theta_1 \cos\theta_2}\ ,\ \mathrm{tg}\,\theta_1 = \frac{1}{c_1}(\alpha_1 - b_1),\ \mathrm{tg}\,\theta_2 = \frac{1}{c_1}(\alpha_2 - b_1).$$

Преобразуем (6), учитывая, что

$$\mathrm{tg}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi},\ 0 < \varphi < \pi,$$

тогда будем иметь с точностью $O(k^3)$

$$w = (w_{00} + kw_{01} + k^2 w_{02}) + (kw_{11} + k^2 w_{12} + k^3 w_{13})\cos\varphi + k^2 w_{22}\cos\varphi + \\ + k^3 w_{33}\cos 3\varphi \tag{7}$$

где

$$w_{00} = m_0,\ m_0 = b_1 + c_1 \mathrm{tg}\frac{\theta_1+\theta_2}{2},\ w_{01} = m_0 m_2,\ m_2 = \mathrm{tg}\frac{\theta_1+\theta_2}{2},$$

$$w_{02} = \frac{1}{2} m_0 m_2 (1+m_2),\ w_{11} = m_1,\ m_1 = c_1 - b_1 m_2 \quad w_{12} = m_1\left(m_2 + \frac{1}{2}\right),$$

$$w_{13} = m_1\left(m_2 + \frac{3}{4}m_2^2\right),\ w_{22} = \frac{1}{2}m_0 m_2^2,\ w_{23} = \frac{1}{4}m_1 m_2^2.$$

Используя выражение

$$\rho = \frac{c^2}{\mu} w^{-1}, \tag{8}$$

определим полярный радиус с точностью $O(k^3)$

$$\rho = (\rho_{00} + k\rho_{01} + k^2\rho_{01} + k^3\rho_{03}) + (k\rho_{11} + k^2\rho_{02} + k^3\rho_{13})\cos\varphi + \\ + (k^2\rho_{22} + k^3\rho_{23})\cos 2\varphi + k^3\rho_{33}\cos 3\varphi, \tag{9}$$

где

$$\rho_{00} = \frac{c^2}{\mu w_{00}},\ \rho_{01} = -\rho_{00}\frac{w_{01}}{w_{00}},\ \rho_{02} = \frac{\rho_{00}}{2w_{00}^2}(w_{11}^2 - 2w_{02}w_{00} + 2w_{01}^2),$$

$$\rho_{03} = \frac{\rho_{00}}{w_{00}^2}(w_{11}w_{13} + 2w_{01}w_{02}),\ \rho_{11} = -\rho_{00}\frac{w_{11}}{w_{00}},\ \rho_{12} = \frac{\rho_{00}}{w_{00}}(2w_{01}w_{11} - w_{12}),$$

$$\rho_{13} = \frac{\rho_{00}}{w_{00}^2}[-w_{13}w_{00} + 2w_{01}w_{12} + (2w_{02} + w_{22})w_{11}],\ \rho_{22} = \frac{\rho_{00}}{2w_{00}^2}\left(w_{11}^2 - 2w_{22}\right),$$

$$\rho_{23} = \frac{\rho_{00}}{w_{00}^2}(w_{11}w_{13} + 2w_{22}w_{01}),\ \rho_{33} = \frac{\rho_{00}}{w_{00}^2}\left(w_{11}w_{22} - w_{33}w_{00}\right).$$

Для определения полярного угла (истинной долготы) используем (5):

$$\vartheta = (\vartheta_{00} + k\vartheta_{01} + k^2\vartheta_{02} + k^3\vartheta_{03})\varphi + (k\vartheta_{11} + k^2\vartheta_{12} + k^3\vartheta_{13})\sin\varphi + \\ + (k^2\vartheta_{22} + k^3\vartheta_{23})\sin 2\varphi + k^3\vartheta_{33}\sin 3\varphi, \tag{10}$$

где

$$\vartheta_{00} = \mu_* w_{00},\ \vartheta_{01} = \mu_* w_{01},\ \vartheta_{02} = \mu_*\left(w_{02} + \frac{1}{4}w_{00}\right),\ \vartheta_{03} = \frac{\mu_*}{4}w_{01},$$

$$\vartheta_{11} = \mu_* w_{11},\ \vartheta_{12} = \mu_* w_{12},\ \vartheta_{13} = \mu_*\left(w_{13} + \frac{1}{8}w_{11}\right),\ \vartheta_{22} = \frac{\mu_*}{2}\left(w_{22} - \frac{1}{4}w_{00}\right),$$

$$\vartheta_{23} = -\frac{\mu_*}{8}w_{01},\ \vartheta_{33} = \frac{\mu_*}{3}\left(w_{33} - \frac{1}{8}w_{11}\right).$$

Из третьего уравнения найдем зависимость промежуточной переменной φ от времени t с точностью $O(k^3)$:

$$\varphi = (1 + k\varphi_{01} + k^2\varphi_{02} + k^3\varphi_{03})t + (k\varphi_{11} + k^2\varphi_{12} + k^3\varphi_{13})\sin t + (k^2\varphi_{22} + k^3\varphi_{23})\sin 2t +$$
$$+ k^3\varphi_{32}\sin 3t + (k^2\varphi_{42} + k^3\varphi_{43})t\cos t + k^3\varphi_{53}t\cos 2t, \qquad (11)$$

где

$$\varphi_{01} = -(t_{01} + t_0),\ \varphi_{02} = -(t_{02} + t_{03}) + (t_{01} + t_0)^2,\ \varphi_{03} = -2t_{02}\varphi_{01},\ \varphi_{11} = -t_{11},$$

$$\varphi_{12} = -t_{12} - t_{11}\varphi_{01},\ \varphi_{13} = -t_{03} + t_{11}t_{02} - t_{12}\varphi_{01},\ \varphi_{22} = -t_{12} + \frac{1}{2}t_{11}^2,$$

$$\varphi_{23} = -\frac{1}{2}(t_{23} - t_{11}t_{12}) - t_{22}\varphi_{01},\ \varphi_{32} = -t_{33} + 2t_{22}t_{11},\ \varphi_{42} = -t_{11}\varphi_{01},$$

$$\varphi_{43} = -t_{12}\varphi_{01} + t_{02}t_{11},\ \varphi_{53} = -2t_{22}\varphi_{01},\ t_{00} = 1 + kt_0,\ t_{00} = a_{00}\vartheta_{00},$$

$$t_{01} = a_{00}\vartheta_{01} + a_{01}\vartheta_{00},\ t_{02} = a_{00}\vartheta_{02} + a_{01}\vartheta_{01} + a_{02}\vartheta_{00} + \frac{1}{2}a_{31}\vartheta_{11},$$

$$t_{11} = a_{31}\vartheta_{00} + a_{00}\vartheta_{11},\ t_{03} = a_{00}\vartheta_{03} + a_{01}\vartheta_{02} + a_{02}\vartheta_{11} + a_{03}\vartheta_{00} + \frac{1}{2}a_{32}\vartheta_{11} +$$

$$+ \frac{1}{2}a_{31}\vartheta_{12} + \vartheta_{22}a_{31},\ t_{12} = a_{32}\vartheta_{00} + a_{31}\vartheta_{01} + a_{01}\vartheta_{11} + a_{00}\vartheta_{12} + 2\vartheta_{22}a_{00},$$

$$t_{13} = a_{33}\vartheta_{00} + a_{31}(\vartheta_{01} + \vartheta_{02}) + \vartheta_{11}\left(a_{02} + \frac{1}{2}a_{12}\right) + \vartheta_{12}a_{01} + a_{00}(\vartheta_{13} + 2\vartheta_{23}) + 2a_{01}\vartheta_{22},$$

$$t_{22} = \frac{1}{2}\left(a_{12}\vartheta_{00} + \frac{1}{2}a_{31}\vartheta_{11}\right),\ t_{23} = \frac{1}{2}\left[a_{31}\left(\vartheta_{22} + \frac{1}{2}\vartheta_{12}\right) + \frac{1}{2}a_{32}\vartheta_{11} + a_{12}\vartheta_{01} + a_{13}\vartheta_{00}\right],$$

$$a_{00} = c^{-1}\rho_{00},\ a_{01} = 2a_{00}\rho_{00}^{-1}\rho_1,\ a_{02} = \rho_{00}^{-2}a_{00}\left(\rho_{01}^2 + 2\rho_{00}\rho_{02} + \frac{1}{2}\rho_{11}^2\right),$$

$$a_{03} = \rho_{00}^{-2}a_{00}[2(\rho_{00}\rho_{03} + \rho_{01}\rho_{02}) + \rho_{11}\rho_{12}],\ a_{12} = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{2}\rho_{11}^2 + 2\rho_{00}\rho_{22}\right),$$

$$a_{13} = \frac{1}{c}[\rho_{11}\rho_{12} + 2(\rho_{00}\rho_{23} + \rho_{01}\rho_{22}],\ a_{23} = \frac{1}{c}[\rho_{11}\rho_{22} + 2\rho_{00}\rho_{33}],\ a_{31} = \frac{1}{c}2\rho_{00}\rho_{11},$$

$$a_{32} = \frac{2}{c}(\rho_{00}\rho_{12} + \rho_{01}\rho_{11}),\ a_{33} = \frac{1}{c}[2(\rho_{00}\rho_{13} + \rho_{01}\rho_{12}) + \rho_{11}(2\rho_{02} + \rho_{22})].$$

Таким образом, найдены полярные координаты ρ, φ выражениями (9), (10) с точностью $O(k^3)$, как явные функции времени посредством (11) в случае движения пробного тела по орбите гиперболического типа.

Решение можно использовать как промежуточную орбиту при построении точных теорий движений ИСЗ.

Если от полярных координат перейти к прямоугольным декартовым координатам

$$x = \rho\cos\vartheta,\ y = \rho\sin\vartheta, \qquad (12)$$

то можно заметить, что они не содержат вековые и смешанные члены, но этот результат справедлив только на отрезке $\alpha_2 < w < \alpha_1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шиголев Б.М.* О промежуточной орбите Хилла в задаче 3-х тел. Труды ГАИШ, 1960. Т.28. С. 91-98.
2. *Шинибаев М.Д.* Поступательное движение пассивно гравитирующего тела в центральном и нецентральном поле тяготения. Алматы: РИО ВАК РК, 2001. 127 с.
3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.

REFERENCES

1. *Shigolev B.M.* O promezhutochnoi orbite Hilla v zadache 3-h tel. Trudy GAISH, 1960. T. 28. S. 91-98.
2. *Shinibaev M.D.* Postupatelnoe dvizhenie passivno gravitiruyzego tela v centralnom i necentralnom pole tyagotenia.-Almaty: RIO VAK RK, 2001, 128s.
3. *Korn G., Korn T.* Spravochnik po matematike dlya nauchnyh rabotnikov i inzhenerov.-Moskva, “Nauka”. 1970, 720s.

М.Д.Шыныбаев, А.А.Беков, Х.А.Әшірбаев, Н.М.Өтенов,
А.А.Әбжапбаров, Б.Тілеубердиев

СЫНАҚ ДЕНЕСІНІҢ ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ҚОЗҒАЛЫСТАҒЫ ПОЛЯРЛЫҚ КООРДИНАТТАРЫН ХИЛЛ ӨРІСІНДЕ ЖАҢА ӘДІСПЕН АНЫҚТАУ ЖОЛЫ

Хилл өрісінде гиперболалық орбитамен қозғалатын сынақ денесінің полярлық координаттары жаңа әдіспен анықталды.

Shinibaev M.D., Bekov A.A., Ashirbaev H.A.,
Utenov N.M., Abzhapbarov A.A., Tileuberdiev B.

A NEW METHOD FOR REPRESENTING THE POLAR COORDINATES OF A TEST BODY IN A GRAVITATIONAL FIELD IN THE CASE OF HILL’S HYPERBOLIC MOTION

We propose a new method for determining the polar coordinates of a test body in the plane problem in the case of Hill’s hyperbolic motion.