УДК 531.1

М. Д. ШИНИБАЕВ[1], А. А. БЕКОВ[1], С. С. БЕКБОЛАТОВА[2], Б. ТИЛЕУБЕРДИЕВ[2], К. С. АСТЕМЕСОВА[3], Д. И. УСИПБЕКОВА[3]

ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ ТИП ДВИЖЕНИЯ ИСЗ В СТАЦИОНАРНОМ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ ЗЕМЛИ

[1]Институт космических исследований им. У. М. Султангазина АО «НЦКИТ», г. Алматы;
[2]Академический инновационный университет, г. Шымкент;
[3]Казахский национальный технический университет им. К. И. Сатпаева, г. Алматы

Найдены полярные координаты ИСЗ в случае параболического типа движения в стационарном поле тяготения Земли.

Пусть спутник, относящийся к разряду близких, совершает орбитальные движения относительно Земли. Дифференциальные уравнения движения в переменных Хилла имеют вид [1]

$$d\vartheta = \frac{wdw}{\sqrt{\alpha + Hw^2 + 2w^3 - w^4}}, \tag{1}$$

$$\frac{dt}{d\vartheta} = \frac{C^3}{w^2\mu^2}, \quad H = \frac{2hC^2}{\mu^2}, \tag{2}$$

где C – постоянная интеграла площадей; ϑ – истинная долгота; w – переменная Хилла, связанная с полярным радиусом ρ следующим выражением

$$\frac{1}{\rho} = w\frac{\mu}{C^2}, \tag{3}$$

μ – гравитационный параметр, α – const, H – const, h – постоянная интеграла энергии.

Целью данной работы является определение полярных координат ИСЗ в случае параболического типа движения в виде явной функции времени.

В этом случае $\alpha > 0$, $H = 0$, поэтому дифференциальное уравнение (1) имеет вид

$$d\vartheta = \frac{wdw}{\sqrt{\alpha + 2w^3 - w^4}}. \tag{4}$$

Установим количество положительных, отрицательных и комплексных корней подкоренного полинома, т.е.

$$G_4(w) = \alpha + 2w^3 - w^4 = 0. \tag{5}$$

Пользуясь теоремой Декарта и следствием этой теоремы, найдем типы корней и введем обозначения: α_1 – положительный корень, α_2 – отрицательный корень, α_3 и α_4 – комплексно сопряженные корни. Учитывая, что в реальных движениях подкоренной полином только положителен, можно выделить область возможности движения. В полиноме (5) старший коэффициент отрицателен. Область возможности движения состоит из одного интервала $\alpha_2 < w < \alpha_1$, $\alpha_3 = b_1 + ic_1$, $\alpha_4 = b_1 - ic_1$.

Рассмотрим движение ИСЗ на этом интервале.

На интервале $\alpha_2 < w < \alpha_1$ справедливо следующее преобразование (4) к нормальной форме Лежандра [2]:

$$d\vartheta = \mu_* \frac{wd\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \tag{6}$$

где

$$tg^2 \frac{\psi}{2} = \frac{\cos\theta_1}{cos\theta_2} \cdot \frac{\alpha_1 - w}{w - \alpha_2}, \ \theta_1 < \frac{\pi}{2}, \ \theta_2 < \frac{\pi}{2} \tag{7}$$

при $w=\alpha_1, \psi=0$, при $w=\alpha_2, \psi=\pi$,

$$k^2=\sin^2\frac{\theta_1-\theta_2}{2},\ \mu_*=-\frac{1}{c_1}(\cos\theta_1\cos\theta_2)^{1/2},\ tg\theta_1=\frac{\alpha_1-b_1}{c_1},\ tg\theta_2=\frac{\alpha_2-b_1}{c_1},$$

$$b_1>0,\ c_1>0,\ \alpha_1>0,\ \alpha_2<0,\ \alpha_3=b_1+ic_1,\ \alpha_4=b_1-ic_1.$$

Пользуясь тригонометрическими соотношениями, можно записать:

$$k^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(\theta_1-\theta_2),\ 1-2k^2=\mu_*^2[c_1^2+(\alpha_1-b_1)\alpha_2-b_1],\ tg^2\frac{\psi}{2}=\frac{1-\cos\psi}{1+\cos\psi}.$$

Найдем w из (7)

$$w=\frac{\alpha_1\cos\theta_1+\alpha_2\cos\theta_2 tg^2\,\psi/2}{\cos\theta_1+\cos\theta_2 tg^2\,\psi/2}, \tag{8}$$

где $\alpha_1=c_1tg\theta_1+b_1, \alpha_2=c_1tg\theta_2+b_1$.

Подставив значения α_1 и α_2 в это выражение, выделив члены с модулем эллиптических интегралов первого рода, выражение для w представим в виде

$$w=m_0+(m_1k+m_2k^3)\cos\psi+(m_3k^2+m_4k^4)\cos^2\psi+\ m_5k^3\cos^3\psi+m_6k^4\cos^4\psi. \tag{9}$$

Здесь

$$m_0=b_1+c_1tg\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2),\ m_1=c_1\left[1+tg^2\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)\right],\ m_2=\frac{m_1}{2},$$

$$m_3=c_1\left[tg^3\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)-ctg\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)\right],\ m_4=c_1tg\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)\cdot\left(1-tg^2\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right),$$

$$m_5=tg^2\frac{\theta_1+\theta_2}{2},\ m_6=c_1\,tg^3\frac{\theta_1+\theta_2}{2}.$$

Пользуясь выражением (9), найдем w^{-2}

$$w^{-2}=m_{00}+(m_{01}k+m_{03}k^3)\cos\psi+(m_{12}k^2+m_{14}k^4)\cdot\cos^2\psi+m_{23}k^3\psi+m_{34}k^4\cos^4\psi. \tag{10}$$

Здесь

$$m_{00}=m_0^{-2},\ m_{01}=-\frac{2m_1}{m_0^3},\ m_{03}=-\frac{2m_2}{m_0^3},\ m_{12}=\frac{1}{m_0^3}\left(\frac{3m_1^2}{m_0}-2m_3\right),\ m_{14}=\frac{2}{m_0^3}\left(\frac{3m_1m_2}{m_0}-m_4\right),$$

$$m_{23}=-\frac{2}{m_0^3}\left(m_5+\frac{2m_1^3}{m_0^2}+\frac{2m_1m_3}{m_0}\right),\ m_{34}=\frac{1}{m_0^3}\left(\frac{5m_1^4}{m_0^3}+\frac{3m_3^2}{m_0}-2m_6-\frac{4m_1m_5}{m_0}\right).$$

Найдем полярный угол ϑ, проинтегрировав исходное уравнение по верхним переменным пределам:

$$\vartheta=(e_0+k^2e_1+k^4e_2)\psi+ke_3+k^3e_4+k^4e_5)\sin\psi+(k^2e_6+k^4e_7)\sin2\psi+(k^3e_8+k^4e_9)\sin3\psi+k^4e_{10}\sin4\psi. \tag{11}$$

Здесь

$$e_0=\mu_*(b_1+c_1\xi),\ \xi=tg\frac{\theta_1+\theta_2}{2},\ e_1=\mu_*\left(\frac{1}{4}b_1+c_1\xi\right),\ e_2=\mu_*\left(\frac{9}{64}b_1+e_{04}c_1\xi\right),\ e_3=\mu_*e_{11}c_1\xi,,$$

$$e_5=\mu_*e_{14}c_1\xi,\ e_6=\frac{1}{2}\mu_*\left(-\frac{1}{4}b_1+e_{22}c_1\xi\right),\ e_7=\frac{1}{2}\mu_*\left(-\frac{3}{16}b_1+e_{24}c_1\xi\right),\ e_8=\frac{1}{3}e_{33}\mu_*c_1\xi,\ e_9=\frac{1}{3}e_{34}\mu_*c_1\xi,$$

$$e_{10}=\frac{3}{256}\mu_*b_1+\frac{1}{4}e_{44}\mu_*c_1\xi,\ e_{02}=\frac{1}{2}\left(\xi^2-\frac{1}{2}\right),\ e_{04}=-\frac{1}{16}+\frac{3}{8}\xi^2-\frac{3}{8}\xi,\ e_{11}=\xi^{-1}-\xi,$$

$$e_{13}=\frac{8}{5}\xi^{-1}+\xi+\frac{3}{4}\xi^3,\ e_{14}=-\frac{3}{8}\xi,\ e_{22}=\frac{1}{2}\xi^2-\frac{3}{4},\ e_{24}=\frac{1}{2}\left(\xi^2-\xi\right),$$

$$e_{33}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\xi^3+\xi-\frac{1}{4}\xi^{-1}\right),\ e_{34}=\frac{3}{8}\xi,\ e_{44}=\frac{3}{32}+\frac{1}{8}\xi^2-\frac{1}{8}\xi.$$

Принимая во внимание $dt = \frac{C^3}{\mu^2} w^{-2} d\vartheta$, найдем

$$t = (\mathrm{I}_{00} + k^2\mathrm{I}_{02} + k^4\mathrm{I}_{04})\psi + (k\mathrm{I}_{11} + k^3\mathrm{I}_{13} + \kappa^4\mathrm{I}_{14})\sin\psi + (k^2\mathrm{I}_{22} + k^4\mathrm{I}_{24})\sin 2\psi +$$
$$+ (k^3\mathrm{I}_{33} + k^4\mathrm{I}_{34})\sin 3\psi + k^4\mathrm{I}_{44}\sin 4\psi, \qquad (12)$$

где

$$\mathrm{I}_{00} = \frac{C}{\mu} m_{00} e_0, l_{02} = \frac{C}{\mu^2}\left(m_{00}e_1 + \frac{1}{2}m_{12}e_0 + \frac{1}{2}m_{01}e_3\right),$$

$$\mathrm{I}_{04} = \frac{C}{\mu^2}\left(m_{00}e_2 + \frac{1}{2}m_{14}e_0 + \frac{1}{2}m_{03}e_3 + \frac{1}{2}m_{12}e_1 + \frac{1}{2}m_{01}e_4 + \frac{3}{8}m_{23}e_3 + \frac{3}{8}m_{34}e_0 + \frac{1}{2}m_{12}e_6\right),$$

$$\mathrm{I}_{11} = \frac{C}{\mu^2}\left(m_{00}e_3 + m_{01}e_0\right), \quad \mathrm{I}_{13} = \frac{C}{\mu^2}\left(m_{00}e_4 + m_{03}e_0 + m_{01}e_1 + \frac{3}{4}m_{23}e_0 + \frac{3}{4}m_{12}e_3 + m_{01}e_0\right),$$

$$\mathrm{I}_{14} = \frac{C}{\mu^2} m_{00}e_5, l_{22} = \frac{C}{2\mu^2}\left(2m_{00}e_6 + \frac{1}{2}m_{12}e_0 + \frac{1}{2}m_{01}e_3\right),$$

$$\mathrm{I}_{24} = \frac{C}{2\mu^2}\left(2m_{00}e_7 + \frac{1}{2}m_{14}e_0 + \frac{1}{2}m_{03}e_3 + \frac{1}{2}m_{12}e_1 + \frac{1}{2}m_{01}e_4 + \frac{1}{2}m_{23}e_3 + \frac{1}{2}m_{34}e_0 + \right.$$
$$\left. = m_{12}e_6 + \frac{3}{2}m_{01}e_8\right), \quad \mathrm{I}_{33} = \frac{C}{3\mu^2}\left(3m_{00}e_8 + \frac{1}{4}m_{23}e_0 + \frac{1}{4}m_{12}e_3 + m_{01}e_6\right),$$

$$\mathrm{I}_{34} = \frac{C}{\mu^2} m_{00}e_9, \mathrm{I}_{44} = \frac{C}{4\mu^2}\left(4m_{00}e_{10} + \frac{1}{8}m_{23}e_3 + \frac{1}{8}m_{34}e_0 + \frac{1}{2}m_{12}e_6 + \frac{3}{2}m_{01}e_8\right).$$

Обратив выражение (12) и использовав решение уравнения Лагранжа [3], найдем зависимость $\psi = \psi(t)$:

$$\psi = (\bar{\mathrm{I}}_1 + k^2\bar{\mathrm{I}}_2 + k^4\bar{\mathrm{I}}_3)t + (k\bar{\mathrm{I}}_4 + k^3\bar{\mathrm{I}}_5 + k^4\bar{\mathrm{I}}_6)\sin t + (k^2\bar{\mathrm{I}}_7 + k^4\bar{\mathrm{I}}_8)\sin 2t +$$
$$+ (k^3\bar{\mathrm{I}}_9 + k^4\bar{\mathrm{I}}_{10})\sin 3t + k^4\bar{\mathrm{I}}_{11}\sin 4t, \qquad (13)$$

где

$$\bar{\mathrm{I}}_1 = \mathrm{I}_{00}^{-1}, \ \bar{\mathrm{I}}_2 = -\bar{\mathrm{I}}_1^2\mathrm{I}_{02}, \ \bar{\mathrm{I}}_3 = -\bar{\mathrm{I}}_1^2\left(\mathrm{I}_{02} - \mathrm{I}_{04}\right), \ \bar{\mathrm{I}}_4 = -\mathrm{I}_{11}\mathrm{I}_{00}^{-1}, \ \bar{\mathrm{I}}_5 = -\bar{\mathrm{I}}_1\left(\mathrm{I}_{13} + \mathrm{I}_{11}\mathrm{I}_{02}\bar{\mathrm{I}}_1 + \frac{1}{2}\mathrm{I}_{11}\mathrm{I}_{22}\right), \ \bar{\mathrm{I}}_6 = -\mathrm{I}_{14}\cdot\bar{\mathrm{I}}_1,$$

$$\bar{\mathrm{I}}_7 = \bar{\mathrm{I}}_1(\mathrm{I}_{11}^2/2 - \mathrm{I}_{22}), \ \bar{\mathrm{I}}_8 = \bar{\mathrm{I}}_1(\mathrm{I}_{22}\cdot\mathrm{I}_{02}\bar{\mathrm{I}}_1 - \mathrm{I}_{24}), \ \bar{\mathrm{I}}_9 = \bar{\mathrm{I}}_1\left(\frac{3}{2}\mathrm{I}_{11}\mathrm{I}_{22} - \mathrm{I}_{33}\right), \ \bar{\mathrm{I}}_{10} = -\bar{\mathrm{I}}_1\mathrm{I}_{34}, \ \bar{\mathrm{I}}_{11} = \bar{\mathrm{I}}_1(\mathrm{I}_{22}^2 - \mathrm{I}_{44}).$$

Принимая во внимание выражение $\rho = \frac{C^2}{\mu} w^{-1}$, находим полярный радиус:

$$\rho = \rho_{00} + (\rho_{01}k + \rho_{02}k^2)\cos\psi + (\rho_{12}k^2 + \rho_{13}k^3 + \rho_{14}k^4)\cos^2\psi +$$
$$+ (\rho_{23}k^3 + \rho_{24}k^4)\cos^3\psi + \rho_{34}k^4\cos^4\psi, \qquad (14)$$

где

$$\rho_{00} = \frac{C^2}{\mu} m_0^{-1}, \ \rho_{01} = -\frac{m_1}{m_0}\rho_{00}, \ \rho_{02} = -\frac{m_2}{m_0}\rho_{00}, \ \rho_{12} = \rho_{00}\frac{m_1^2 - m_3 m_0}{m_0^2}, \ \rho_{13} = \rho_{00}\frac{2m_1 m_2}{m_0^2},$$

$$\rho_{14} = \rho_{00}\frac{m_2^2 - m_1 m_0}{m_0^2}, \ \rho_{23} = \rho_{00}m_0^{-1}\left(\frac{2m_1}{m_0} - m_5 - \frac{m_1^2}{m_0^2}\right), \ \rho_{24} = \rho_{00}\frac{m_2}{m_0^2}(2m_3 - 3m_1),$$

$$\rho_{34} = \rho_{00}m_0^{-1}(2m_1 m_5 m_0^{-1} + m_3^2 m_0^{-1} - m_6).$$

Выражения (11) и (14) посредством (13) определяют ϑ и ρ как явные функции времени. Полученные полярные координаты можно использовать для построения решений дифференциальных уравнений ИСЗ в случае нестационарного поля тяготения центрального поля.

ЛИТЕРАТУРА

1 Шинибаев М.Д. Поступательное движение пассивно гравитирующего тела в центральном и нецентральном поле тяготения. – Алматы: РИО ВАК РК, 2001. – 128 с.
2 Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1970. – 720 с.
3 Дубошин Г.Н. Небесная механика: Основные задачи и методы. – М., 1968. – 799 с.

REFERENCES

1. *Shinibaev M.D.* Postupatelnoe dvizhenie passivno gravitiruyzego tela v centralnom i necentralnom pole tyagotenia.-Almaty: RIO VAK RK, 2001, 128s.
2. *Korn G., Korn T.* Spravochnik po matematike dlya nauchnyh rabotnikov i inzhenerov.-Moskva, “Nauka”. 1970, 720s.
3. *Duboshin G.N.* Nebesnaya mehanika: Osnovnye zadachi i metody.-Moskva, 1968, 799s.

М. Д. Шыныбаев, А. А. Беков, С. С. Бекболатова, Б. Тілеубердиев,
К. С. Астемесова, Д. И. Өсіпбекова

ЖЕРДІҢ СТАЦИОНАРЛЫҚ ТАРТЫЛУ ӨРІСІНДЕГІ
ЖЖС ПАРАБОЛАЛЫҚ ҚОЗҒАЛЫС ТҮРІ

Жердің стационарлық тартылу өрісінің параболалық қозғалыс түрі жағдайындағы ЖЖС-нің полярлық координаттары табылды.

M. D. Shinibaev, A. A. Bekov, S. S. Bekbolatova, B. Tileuberdiev,
K. S. Astemesova, D. I. Usipbekova

PARABOLIC TYPE MOTION OF ARTIFICIAL EARTH SATELLITE
IN STATIONARY EARTH GRAVITATIONAL FIELD

The polar coordinates of AES in the case of parabolic motion in stationary Earth gravitational field are received.