УДК 521.01

Б.К. СИНЧЕВ

ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

(Представлена академиком НАН РК Г.У.Уалиевым)

В работе предложен новый точный метод кинематического синтеза механизмов.

Из обширного круга задач кинематического синтеза различных механизмов можно выделить задачи воспроизведения точного или приближенного закона движения или заданной траектории (точки) выходного звена при определенном законе движения входного звена. При исследовании динамической модели механизма возникают задача Коши и краевые задачи для дифференциальных и других уравнений, описывающих движения звеньев с учетом массо-инерционных характеристик и других факторов. Для краевых задач произвольная траектория должна пройти через заданные начальную и конечную точки, а для задачи Коши – через начальную. Эти задачи тесно связаны с вышеуказанными задачами.

В интерполяционных методах кинематического синтеза на основе обобщенного полинома поиск искомых параметров рычажного механизма зависит от числа положений входного и выходного звеньев. Н.И. Левитским в [1] установлено, что для синтеза передаточного четырехзвенного механизма необходимо задать три положения входного и выходного звеньев, а в случае задания двух положений этих звеньев задача синтеза будет иметь бесчисленное количество возможных решений. Современные методы кинематического синтеза четырехзвенных механизмов [2,3], основанные на аппроксимационном подходе и квадратическом приближении, сводятся к решению системы квадратных уравнений либо к итерационной процедуре решения нескольких систем линейных уравнений, в которых трудно выбрать начальные значения искомых параметров. В работе [4] предложен численный метод кинематического синтеза рычажных механизмов.

Ставится задача. Разработать точный метод кинематического синтеза четырехзвенных механизмов с различными кинематическими парами на основе методов оптимизаций.

Решение задачи. Кинематическая схема четырехзвенного механизма, представленная на рисунке 1, описывается векторным уравнением

$$\overline{l_1}+\overline{l_2}+\overline{l_3}-\overline{l_0}=0\ , \qquad (1)$$

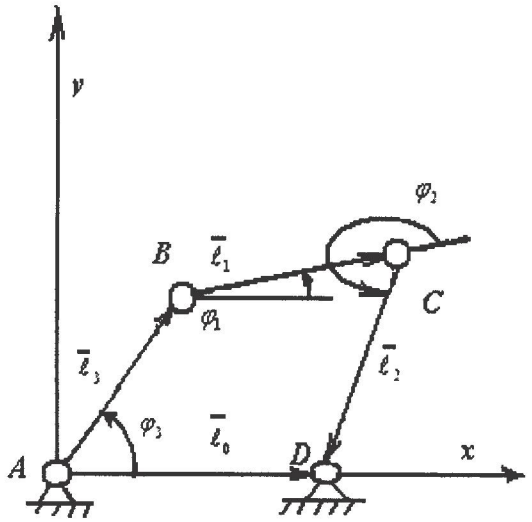

Рис. 1.Кинематическая схема четырехзвенного механизма

где $\overline{l_0}$, $\overline{l_1}$, $\overline{l_2}$ и $\overline{l_3}$ – вектора, связанные с основанием неподвижной системы координат, шатуном, входным и выходным звеньями механизма соответственно. Здесь вектор $\overline{l_i} = l_i\,\overline{e_i}$.

Тогда исходная задача формулируется следующим образом: определить длины звеньев l_i, i=0,1,2,3 передаточного четырехзвенного механизма по двум положениям выходного и входного звеньев:

$$\overline{e_2} = \overline{e_2}(t),\ \overline{e_3} = \overline{e_3}(t) \text{ при } t_0 \text{ и } t_1\,. \qquad (2)$$

Здесь движения этих звеньев определены через единичные вектора по времени t, $t \in [t_0, t_1]$.Такая постановка задачи дает возможность показать связь с краевой задачей.

Вводим функционал, основанный на уравнении (1),

$$\begin{aligned} \mathrm{I} = 1 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2z_1z_2\overline{e_1e_2} + \\ + 2z_1z_3\overline{e_1e_3} + 2z_2z_3\overline{e_2e_3} - \\ - 2z_1\overline{e_0e_1} - 2z_2\overline{e_0e_2} - 2z_3\overline{e_0e_3}, \end{aligned} \qquad (3)$$

где $z_i = {}^{l_i}/_{l_0}$.

Необходимые условия минимума функционала (3) по параметрам z_i имеют вид:

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial z_i} = 0, \quad i = \overline{1,3}. \qquad (4)$$

Из (4) имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} z_1 + \overline{e_1e_2}z_2 + \overline{e_1e_3}z_3 - \overline{e_0e_1} = 0 \\ \overline{e_1e_2}z_1 + z_2 + \overline{e_2e_3}z_3 - \overline{e_0e_2} = 0 \\ \overline{e_1e_3}z_1 + \overline{e_2e_3}z_2 + z_3 - \overline{e_0e_3} = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

где $\overline{e_ie_j}$ – скалярное произведение единичных векторов.

В первую очередь, необходимо проверить независимость уравнений системы (5) на основе определителя

$$|A| = 1 + 2\overline{e_1e_2}\cdot\overline{e_2e_3}\cdot\overline{e_1e_3} - (\overline{e_1e_3})^2 - (\overline{e_2e_3})^2 - (\overline{e_1e_2})^2. \qquad (6)$$

Надо отметить, что в общем случае число базисных уравнений этой системы совпадает с числом исходных уравнений кинематики(1). В частности, число базисных уравнений для плоского четырехзвенного механизма равно двум. Тогда приравненный к нулю определитель(6) имеет вид:

$$1 + 2\overline{e_1e_2}\cdot\overline{e_2e_3}\cdot\overline{e_1e_3} - (\overline{e_1e_3})^2 - (\overline{e_2e_3})^2 - (\overline{e_1e_2})^2 = 0\,. \qquad (7)$$

Нетрудно проверить тождественное выполнение соотношения (7). Поэтому для поиска единичного вектора $\overline{e_1}(t)$ уравнение (7) использовать нельзя. Предлагается следующий математический способ отыскания этого вектора. Для этого разобьем систему (5) на три подсистемы (8), (9) и (10):

$$\begin{aligned} z_2 + e_2e_3z_3 &= e_0e_2 - e_1e_2z_1, \\ e_2e_3z_2 + z_3 &= e_0e_3 - e_1e_3z_1, \end{aligned} \qquad (8)$$

$$\begin{aligned} e_1e_2z_2 + e_1e_3z_3 &= e_0e_1 - z_1, \\ z_2 + e_2e_3z_3 &= e_0e_2 - e_1e_2z_1, \\ e_2e_3z_2 + z_3 &= e_0e_3 - e_1e_3z_1, \end{aligned} \qquad (9)$$

$$e_1e_2z_2 + e_1e_3z_3 = e_0e_1 - z_1\,. \qquad (10)$$

Такое разбиение на подсистемы возможно из-за указанного числа базисных уравнений (1), а для нахождения длин звеньев четырехзвенного механизма достаточно рассмотрения двух подсистем.

Тогда из подсистемы (8) определяем неизвестные z_2, z_3

$$z_2 = \frac{e_0e_2 - e_1e_2z_1 - (e_0e_3 - e_1e_3z_1)e_2e_3}{1 - (e_2e_3)^2}, \qquad (11)$$

$$z_3 = \frac{e_0e_3 - e_1e_3z_1 - e_2e_3(e_0e_2 - e_1e_2z_1)}{1-(e_2e_3)^2}, \quad (12)$$

а также из (9) – эти же неизвестные

$$z_2 = \frac{(e_0e_1 - z_1)e_2e_3 - (e_0e_2 - e_1e_2z_1)e_2e_3}{e_1e_2e_2e_3 - e_1e_3}, \quad (13)$$

$$z_3 = \frac{e_1e_2(e_0e_2 - e_1e_2z_1) - (e_0e_1 - z_1)}{e_1e_2 * e_2e_3 - e_1e_3}. \quad (14)$$

Приравнивая (11) и (13), имеем

$$Z_1 = \frac{A(e_0e_1 \cdot e_2e_3 - e_0e_2 \cdot e_1e_3) - (e_0e_2 - e_0e_3 \cdot e_2e_3)B}{(e_1e_3 \cdot e_2e_3 - e_1e_2)B - (e_1e_2 \cdot e_1e_3 - e_2e_3)A}, \quad (15)$$

соответственно - (12) и (14)

$$Z_1 = \frac{(e_0e_2 \cdot e_1e_2 - e_0e_1)A - (e_0e_3 - e_0e_2 \cdot e_2e_3)B}{(e_1e_2 \cdot e_2e_3 - e_1e_3)B - (1-(e_1e_2)^2)A}, \quad (16)$$

где $A = 1-(e_2e_3)^2, B = e_1e_2 \cdot e_2e_3 - e_1e_3$.

На основе формул (15) и (16) получим нелинейное уравнение для нахождения единичного вектора $\overline{e}_1(t)$

$$\left[A(e_0e_1 \cdot e_2e_3 - e_0e_2 \cdot e_1e_3) - (e_0e_2 - e_0e_3 \cdot e_2e_3)B\right] \times$$
$$\times\left[(e_1e_2 \cdot e_2e_3 - e_1e_3)B - (1-(e_1e_2)^2)A\right] =$$
$$= \left[(e_1e_3 \cdot e_2e_3 - e_1e_2)B - (e_1e_2 \cdot e_1e_3 - e_2e_3)A\right] \times$$
$$\times\left[(e_0e_2 \cdot e_1e_2 - e_0e_1)A - (e_0e_3 - e_0e_2 \cdot e_2e_3)B\right]. \quad (17)$$

Подсистема (10) может быть использована для дополнительного исследования уравнения (17).

Для четырехзвенного механизма с вращательными парами достаточно представить единичные векторы $\overline{e}_i$ в следующем виде:

$$\overline{e}_i(t) = \begin{pmatrix} \cos & \varphi_i(t) \\ \sin & \varphi_i(t) \end{pmatrix} \quad (18)$$

Из уравнения(17) находится единичный вектор (нули функции)

$$\overline{e}_1(t) = \overline{f}(\overline{e}_2(t), \ \overline{e}_3(t)), \quad (19)$$

где $\overline{f}$ – известная векторная функция.

Надо отметить, что во многих случаях вектор $\overline{e}_0(t)$ имеет постоянное значение, так как он в большей степени жестко связан с основанием четырехзвенного механизма, т.е.

$$\overline{e}_0(t) = const, t \in [t_0, t_1]. \quad (20)$$

Для учета соотношения (20) достаточно повернуть неподвижную систему координат, связанную с механизмом, на этот угол.

После нахождения единичного вектора (19) определяем длины звеньев l_i на базе формул (15).(11), (12) либо (16),(13),(14).

В качестве примера рассмотрен четырехзвенный механизм с вращательными парами: l_0=10.4см, угловые координаты коромысла и кривошипа $\varphi_2^1 = 240^0$, $\varphi_3^1 = 45^0$ соответственно, $\varphi_0^1 = 0^0$ для первого положения и аналогично для второго положения $\varphi_2^2 = 253^0$, $\varphi_3^2 = 60^0$, $\varphi_0^2 = 0^0$. Угловые координаты шатуна для первого и второго положений $\varphi_1^1 = 10^0$, $\varphi_1^2 = 9^0$ определены из уравнения (17) при вышеуказанных значениях угловых координат входного и выходного звеньев механизма. Тогда длины звеньев механизма, найденные из линейной системы (15), (11) и (12) равны l_1=10см, l_2=5см, l_3=4см. с незначительными отклонениями соответственно. Результаты проверены путем геометрического построения четырехзвенного механизма с найденными длинами звеньев и заданными углами кривошипа и коромысла.

Кинематический синтез передаточного механизма с поступательной парой (кривошипно – ползунный механизм) осуществляется аналогично. Для этого достаточно соотношения (18) переписать следующим образом:

$$\varphi_2 = \varphi_2(t), \quad l_3 = l_3(t), \quad \varphi_3 = const$$

Процедуры синтеза кулисного передаточного механизма эквивалентны по сложности с синтезом кривошипно-ползунного механизма.

В заключение можно отметить, что разработан точный метод синтеза передаточных четырехзвенных механизмов с различными кинематическими парами. Предложенный подход кинематического синтеза механизмов базируется на методах оптимизации и геометрических свойствах многоугольников. Эффективность данного метода по сравнению с известными методами кинематического синтеза передаточных механизмов заключается в меньшем задании количества положений входного и выходного звеньев, а достоинством - является то, что длины звеньев механизма определяются из системы линейных

уравнений, основанной на исходных уравнениях кинематики. Предложено новое направление в кинематическом синтезе, отличное от интерполяционного, квадратического и аппроксимационного подходов, – оптимизационный синтез механизмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин.- М.:Наука,1982.-640с.*

2. *Артоболевский И.И., Левитский Н.И., Черкудинов С.А.* Синтез плоских механизмов. – М: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1959. -1084с.

3. *Саркисян Ю.Л.* Аппроксимационный синтез механизмов. – М.: Наука, 1982. – 304 с.

4. *Синчев Б.К. , Муханова А.М.,Тажибахыт Г.С. Кинематический синтез механизмов. Труды Международной научно-практической конференции «Инновационные технологии в пищевой и легкой промышленности» -Алматы: АТУ, 2008. с.156-160*

Резюме

Механизмнің кинематикалық синтезінің жаңа нақты әдістері ұсынылған.

Summary

New exact method of kinematical synthesis of mechanisms has been proposed in the paper.

Алматинский технологический университет

Поступила 04.04.09 г.