Д. СУРАГАН[1,2]

([1]Институт математики и математического моделирования МОН РК, г. Алматы;

[2]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы)

ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И НА СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОБЪЕМНОГО ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ СФЕРЫ

Аннотация

В работе [1] найдены граничные условия объемного потенциала для уравнения Пуассона в любой огра-ниченной области Ω многомерного Евклидового пространства, а также было показано, что решение полу-ченной граничной задачи совпадает с объемным потенциалом, дано доказательство теоремы нахождения собственных значений и собственных функций объемного потенциала для уравнения Лапласа. В данной работе исследован трехмерный случай спектральной задачи объемного потенциала для уравнения Лапласа и получены собственные значения и собственные функции объемного потенциала для уравнения Лапласа в шаре. Все вычисления проводятся для случая, когда область является шаром.

Ключевые слова: объемный потенциал, уравнение Лапласа, собственные значения, собственные функции.

Кілт сөздер: көлемді әлеует, Лаплас теңдеуі, меншікті мәндер, меншікті функциялар.

Keywords: volume potential, Laplace equation, eigenvalues, eigenfunctions.

Постановка задачи: *Найти собственные значения и собственные функции трехмерного объемного потенциала в шаре* $\Omega = \{|x| < \delta, x \in R^3\}$:

$$u(x) = \lambda \int_{\Omega} \varepsilon_3(x-y) u(y) dy, \tag{1}$$

где $\varepsilon_3(x-y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}$.

Теорема. *Собственные значения* λ_{lj} *трехмерного объемного потенциала в шаре* $\Omega = \{|x| < \delta, x \in R^3\}$ *задаются формулой:*

$$\lambda_{lj} = \frac{\left[\mu_j^{l+\frac{1}{2}}\right]^2}{\delta^2}, \tag{2}$$

$l = 0,1,..., j = 1,2,..., m = 0,\pm 1,...,\pm l$, *где* $\mu_j^{l+\frac{1}{2}}$ *– корни следующего уравнения*

$$(2l-1)J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_j^{l+\frac{1}{2}}) + \frac{\mu_j^{l+\frac{1}{2}}}{2}\left(J_{l-\frac{1}{2}}(\mu_j^{l+\frac{1}{2}}) - J_{l+\frac{3}{2}}(\mu_j^{l+\frac{1}{2}})\right) = 0 \cdot \tag{3}$$

Собственные функции, соответствующие собственным значениям λ_{lj}, *образуют полную ортого-нальную систему в* $L_2(\Omega)$ *и представимы в виде:*

$$u_{ljm} = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{l+\frac{1}{2}}\left(\mu_j^{l+\frac{1}{2}} \frac{r}{\delta}\right) Y_l^m(\theta,\varphi), \tag{4}$$

где $Y_l^m(\theta,\varphi) = \begin{cases} \Im_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi, m = 0,1,...,l; \\ \Im_l^m(\cos\theta)\sin m\varphi, m = 0,1,...,l; l = 0,1,..., \end{cases}$ *– сферические функции;* $\Im_l^m$ *– полиномы Лежандра;* (r,θ,φ) *– соответствующие сферические координаты.*

Доказательство теоремы. В силу теоремы 1 [1], задача (1) эквивалентна краевой задаче на собственные значения и соответствующие собственные функции для трехмерного шара $\Omega = \{|x| < \delta, x \in R^3\}$:

$$\Delta u = -\lambda u, \tag{5}$$

$$-\frac{1}{2}u(x) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_3(x-y)}{\partial n_y} u(y) dS_y - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_3(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dS_y = 0, \ x \in \partial\Omega, \tag{6}$$

где $\varepsilon_3(x-y) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}$.

Построим собственные функции. Эту задачу удобно решать в сферических координатах

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi, \ x_2 = r\sin\theta\sin\varphi, \ x_3 = r\cos\theta \ \ 0 \le r < \delta, \ 0 \le \theta < \pi, \ 0 \le \varphi < 2\pi,$$

$$y_1 = \rho\sin\vartheta\cos\psi, \ y_2 = \rho\sin\vartheta\sin\psi, \ y_3 = \rho\cos\vartheta \ \ 0 \le \rho < \delta, \ 0 \le \vartheta < \pi, \ 0 \le \psi < 2\pi.$$

В этих координатах задача (5)–(6) для функции $\tilde{u}(r,\theta,\varphi) = u(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ принимает вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \tilde u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\tilde u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\tilde u}{\partial\varphi^2}=-\lambda\tilde u\,, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}\tilde u(r,\theta,\varphi)+\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2-2r\rho\Psi+r^2}}\left.\frac{\partial\tilde u(\rho,\vartheta,\psi)}{\partial\rho}\right|_{\rho=\delta}d\vartheta d\psi-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left.\frac{1}{\sqrt{\rho^2-2r\rho\Psi+r^2}}\right|_{\rho=\delta}\tilde u(r,\vartheta,\psi)d\vartheta d\psi=0,\ r=\delta\ , \tag{8}$$

где $\Psi=\sin\theta\cos\varphi\sin\vartheta\cos\psi+\sin\theta\sin\varphi\sin\vartheta\sin\psi+\cos\theta\cos\vartheta$.

К граничному условию при $r = \delta$ необходимо еще добавить граничное условие при $r = 0$. Это условие состоит в том, что функция $\tilde u$ должна быть ограниченной в окрестности точки $r = 0$. Далее, функция $\tilde u$, очевидно, должна быть 2π-периодической относительно φ, т.е.

$$|\tilde u(0,\theta,\varphi)|<\infty\,,\tilde u(\delta,\theta,\varphi)=\tilde u(\delta,\theta,\varphi+2\pi)\,,\ \tilde u(\delta,\theta,\varphi)=\tilde u(\delta,\theta+2\pi,\varphi)\,. \tag{9}$$

В соответствии с общей схемой метода Фурье собственные функции задачи (7)–(8) ищем в виде произведения $R(r)Y(\theta,\varphi)$.

Разделяя переменные, для функций Y и R получим спектральные краевые задачи:

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\mu Y=0,\ Y\in C^{\infty}(\partial\Omega)\,, \tag{10}$$

$$(r^2R')'+\left(\lambda r^2-\mu\right)R=0\,,\ \ |R(0)|<\infty\,, \tag{11}$$

$$R(r)Y(\theta,\varphi)+\frac{R'(\delta)\delta^2}{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left.\frac{1}{\sqrt{\rho^2-2r\rho\Psi+r^2}}\right|_{\rho=\delta}Y(\vartheta,\psi)d\vartheta d\psi-$$

$$-\frac{\delta^2R(\delta)}{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\rho}\left.\frac{1}{\sqrt{\rho^2-2r\rho\Psi+r^2}}\right|_{\rho=\delta}Y(\vartheta,\psi)d\vartheta d\psi=0,\ r\to\delta\ . \tag{12}$$

При $\mu = l(l+1)$, $l = 0,1,..$, как хорошо известно, задача (10) имеет ненулевые решения и этими решениями являются сферические функции Y_l^m, $m=0,\pm1,\ldots,\pm l$.

Лемма 1. *Пусть Y_l – сферическая функция порядка l. Имеет место равенство*

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(Y_l(\theta,\varphi)\right)^{-1}Y_l(\vartheta,\psi)P_k(\Psi)d\vartheta d\psi=\frac{4\pi}{2l+1}\delta_{lk}\,,\ где\ \delta_{lk}=\begin{cases}0, & k\neq l\\ 1, & k=l\end{cases} \tag{13}$$

и $P_l(\Psi)$ – полиномы Лежандра.

Доказательство леммы 1. Пусть $x = (r,\theta,\varphi)$ и $y = (0,0,1)$. Разложим функцию

$$\frac{1}{|x-y|}=\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}=\frac{1}{\sqrt{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})}}$$

в ряд по степеням r,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}a_l(\cos\theta)r^l\,. \tag{14}$$

Ряд (14) сходится равномерно при $|r|<1$ и $\theta\in[0,\pi]$, и его можно почленно дифференцировать по r и θ бесконечное число раз, причем полученные ряды будут сходиться равномерно по (r,θ) на $[-r_0,r_0]\times[0,\pi]$ при любом $r_0<1$. Применяя, что функция гармонична в шаре $|x|<1$, при всех $r\in(0,1)$ получаем

$$0=\sum_{l=0}^{\infty}\Delta[a_l(\cos\theta)r^l]=\sum_{l=0}^{\infty}r^{l-2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{da_l}{d\theta}\right)+l(l+1)a_l\right].$$

Справедливо разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1-2v\Psi+v^2}}=\mathop{\text{е}}\limits_{l=0}^{\text{ґ}}\text{Б}_l(\Psi)v^l,\, v<1. \tag{15}$$

Т.е. $\left(1-2v\Psi+v^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ производящей функцией для полиномов Лежандра $\Im_l(\Psi)$.

$$\left.\frac{1}{\sqrt{\rho^2-2r\rho\Psi+r^2}}\right|_{\rho=\delta}=\frac{1}{\delta\sqrt{1-2\frac{r}{\delta}\Psi+\frac{r^2}{\delta^2}}}=\mathop{\text{е}}\limits_{k=0}^{\text{ґ}}\text{Б}_k(\Psi)\frac{r^k}{\delta^{k+1}}\,, \tag{16}$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left.\frac{1}{\sqrt{\rho^2-2r\rho\Psi+r^2}}\right|_{\rho=\delta}=\frac{\partial}{\partial\rho}\left.\mathop{\text{е}}\limits_{k=0}^{\text{ґ}}\text{Б}_k(\Psi)\frac{r^k}{\rho^{k+1}}\right|_{\rho=\delta}=-\mathop{\text{е}}\limits_{k=0}^{\text{ґ}}(k+1)\text{Б}_k(\Psi)\frac{r^k}{\delta^{k+2}}\,. \tag{17}$$

Применяя формулу Грина для шара $\Omega=\left\{|x|<\delta, x\in R^3\right\}$ к гармоническому полиному

$$r^lY_l(\theta,\varphi)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\rho^lY_l(\vartheta,\psi)}{\partial\rho}\frac{1}{\sqrt{\rho^2-2r\rho\Psi+r^2}}-\rho^lY_l(\vartheta,\psi)\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\sqrt{\rho^2-2r\rho\Psi+r^2}}d\vartheta d\psi$$

(18)

и подставляя выражения (16) и (17) в формулу (18) и производя почленное интегрирование, получаем

$$r^lY_l(\theta,\varphi)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}l\delta^{l-1}Y_l(\vartheta,\psi)\sum_{k=0}^{\infty}\Im_k(\Psi)\frac{r^k}{\delta^{k+1}}+Y_l(\vartheta,\psi)\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\Im_k(\Psi)\frac{r^k}{\delta^{k+2}}d\vartheta d\psi=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{\delta^{k+2}}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(l\delta+k+1)Y_l(\vartheta,\psi)\Im_k(\Psi)d\vartheta d\psi\,.$$

Возьмем δ = 1, отсюда ввиду произвольности r вытекает

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_l(\vartheta,\psi)\Im_k(\Psi)\,d\vartheta\, d\psi = \frac{4\pi}{2l+1}\delta_{lk}Y_l(\theta,\varphi), \text{ где } \delta_{lk}=\begin{cases}0, k\neq l\\ 1, k=l\end{cases}.$$

Умножая на $\left(Y_l(\vartheta,\psi)\right)^{-1}$, получим (13), что и требовалось доказать.

Используя предыдущие рассуждения можно представить (12) в следующем виде:

$$\Re(\delta)+\frac{2\delta}{4l+3}\Re'(\delta)=0. \tag{19}$$

Лемма 2. *Задача (11), (19) – самосопряженная.*

Доказательство леммы 2 не составляет труда. Достаточно непосредственным вычислением проверить $\left(Lu,v\right)_0=\left(u,Lv\right)_0$, т.е.

$$\int_0^{\delta}\left((r^2u')'+\left(\lambda r^2-\mu\right)u\right)v\,dr=\int_0^{\delta}\left((r^2v')'+\left(\lambda r^2-\mu\right)v\right)u\,dr.$$

При μ = $l(l+1)$ уравнение (11) для функции $\Re_1=\sqrt{r}\Re$ превращается в уравнение Бесселя

$$r^2\Re_1''+r\Re_1'+\left(\lambda r^2-\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right)\Re_1=0. \tag{20}$$

Ограниченным в нуле решением уравнения (11) является фукция

$$\Re(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}J_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r). \tag{21}$$

Чтобы удовлетворить граничному условию (19), необходимо положить в (19) $\Re(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}J_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r)$. Тогда

$$J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_j^{l+\frac{1}{2}})+\frac{\mu_j^{l+\frac{1}{2}}}{l+1}J'_{l+\frac{1}{2}}(\mu_j^{l+\frac{1}{2}})=0, \tag{22}$$

где $\mu_j^{l+\frac{1}{2}}=\sqrt{\lambda}\delta$, j = 1,2,.., –положительные корни уравнения (22).

И так

$$\lambda_{lj}=\frac{\left[\mu_j^{l+\frac{1}{2}}\right]^2}{R^2},\quad u_{ljm}(x)\frac{1}{\sqrt{r}}J_{l+\frac{1}{2}}\left(\mu_j^{l+\frac{1}{2}}\frac{r}{\delta}\right)Y_l^m(\theta,\varphi), \tag{23}$$

$$l = 0,1,\ldots, j = 1,2\ldots, m = 0,\pm1,..,\pm l,$$

собственные значения и собственнные функции краевой задачи (5)-(6).

Система собственных функций $\{u_{ljm}\}$ ортогональна и полна в $L_2(\Omega)$, и поэтому других собст-венных значений и собственных функций задача (5)–(6) не имеет. Теорема 1 доказана полностью.

Заключение. Одной из самых сложных проблем математической физики является нахождение явного вид задачи для сложной области Евклидового пространства. Например, в случае классической граничной задачи для уравнения Лапласа мы можем найти ее решение в явном виде лишь для некоторых канонических областей Евклидового пространства. Новизна данной работы состоит в том, что мы показали, что спектральная нелокальная граничная задача для уравнения Лапласа (5)-(6) является разрешимой в явном виде.

ЛИТЕРАТУРА

1 Кальменов Т.Ш., Сураган Д. К спектральным вопросам объемного потенциала // Доклады академии наук. – 2009. – Т. 428, № 1. – С. 16-19.

2. Kal'menov T.Sh., Suragan D. A boundary condition and spectral problems for the Newton potentials, Operator theory: Advances and applications. – 2011. – Vol. 216. – P. 187-210.

3 Владимиров В.С.. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.

REFERENCES

1 Kal'menov T.Sh., Suragan D. K spektral'nym voprosam ob’emnogo potenciala // Doklady akademii nauk. – 2009. – T. 428, № 1. – S. 16-19. (in Russ).

2 Kal'menov T.Sh., Suragan D. A boundary condition and spectral problems for the Newton potentials, Operator theory: Advances and applications. – 2011. – Vol. 216. – P. 187-210.

3. Vladimirov V.S. Uravnenija matematicheskoi fiziki. – M.: Nauka, 1981 (in Russ).

Резюме

Д. Сураган[1,2]

([1]ҚР БҒМ Математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы қ.;

[2]әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ.)

КӨЛЕМДІ ӘЛЕУЕТТІҢ ШАРДАҒЫ МЕНШІКТІ МӘНДЕРІ

ЖӘНЕ МЕНШІКТІ ФУНКЦИЯЛАРЫНА ЕСЕП

[1] жұмыста кез келген Ω облыс үшін Пуассон теңдеуі үшін көлемді әлеуеттің шекаралық шарттары табылған, сонымен бірге алынған шекаралық есептің шешімі көлемді әлеуетпен дәл келетіні көрсетілген жәнеде Пуассон теңдеуі үшін көлемді әлеуеттің меншіті мәндері мен меншікті функцияларын анықтау теоремасы дәлелденген. Осы аталмыш жұмыста Пуассон теңдеуі үшін көлемді әлеуетіне үш өлшемді спектральдық есептер қарастырылады және де көлемді әлеуеттің барлық меншікті мәндері мен меншікті функциялары шарда айқын түрде табылады.

Кілт сөздер: көлемді әлует, Лаплас теңдеуі, меншікті мәндер, меншікті функциялар.

Summary

D. Suragan[1,2]

([1] Al-Farabi Kazakh national university, Almaty;

[2]Institute of mathematics of the Ministry of Education And Science of The Republic of Kazakhstan, Almaty)

EIGENVALUE AND EIGENFUNCTION PROBLEMS

OF THE VOLUME POTENTIAL IN A SPHERE

In the paper [1] the authors found boundary conditions of the volume potential for the Poisson equation in any bounded domain Ω of multidimensional Euclidean space and it was proved that the solution of obtained boundary-value problem coincides with the volume potential. In addition, in the paper [1] a spectral theorem for eigenvalues and eigenfunctions of the volume potential was proved in two dimensional Euclidian space. In this paper we investigate three dimensional spectral problems for the volume potential. We find explicit formulas of all eigenvalues and eigenfunctions of the volume potential for the Laplace operator in a three dimensional ball in Euclid space.

Keywords: volume potential, Laplace equation, eigenvalues, eigenfunctions.

Поступила 18.04.2013