Д. СУРАГАН[1,2]

([1]Институт математики и математического моделирования МОН РК, г. Алматы;

[2]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТОЧНОМ ПЕРЕНОСЕ УСЛОВИЙ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗОММЕРФЕЛЬДА НА ГРАНИЦУ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Аннотация

Для решения неоднородного уравнения Гельмгольца в ограниченной трехмерной области с достаточно гладкой границей предложена новая постановка граничных условий, обладающих свойством подавлять волны, отраженные от границы. Доказаны существование и единственность классического решения задачи в предложенной постановке. Показано, что внутри ограниченной области это решение совпадает с решением (с излученным решением) задачи, поставленной в неограниченной области с условием излучения Зоммер-фельда. Описано граничное условие объемного потенциала для уравнения Гельмгольца.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, условия излучения Зоммерфельда, граничные условия нелокального типа.

Кілт сөздер: Гельмгольц теңдеуі, Зоммерфельдтің сәулелену шарты, жергілікті емес түрдегі шекаралық шарттар.

Keywords: Helmholtz equation, Sommerfeld radiation condition, boundary conditions of non-local type.

В этом параграфе мы построим краевые условия, которым удовлетворяет решение уравнения Гельмгольца с условиями излучения Зоммерфельда на границе произвольной ограниченной области [см. 1].

Уравнением Гельмгольца называется уравнение

$$\Delta u + k^2 u = -f(x). \tag{1}$$

При $k = 0$ оно превращается в уравнение Пуассона. Теория уравнения Гельмгольца близка к теории уравнения Пуассона, однако имеются некоторые особенности, связанные с неединст-венностью решения (при $k^2 > 0$ и в дальнейшем считаем $k > 0$).

Решение уравнения Пуассона во всем пространстве единственно в классе (обобщенных) функций, стремящихся к нулю на бесконечности. Для уравнения Гельмгольца это утверждение уже не имеет места, поскольку соответствующее однородное уравнение

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{2}$$

например, имеет ненулевое решение в R^3, убывающее на бесконечности:

$$u(x) = -\frac{\sin k|x|}{4\pi|x|}.$$

Чтобы выделить класс единственности решения для уравнения Гельмгольца в неограниченных областях, являющихся внешностью ограниченных областей, нужно потребовать дополнительные ограничения на поведение решения на бесконечности. Такими ограничениями являются, например, *условия излучения Зоммерфельда*

$$u(x) = O\left(|x|^{-1}\right),\ \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} - iku(x) = o\left(|x|^{-1}\right),\ |x| \to \infty, \tag{3}$$

или

$$u(x) = O\left(|x|^{-1}\right),\ \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} + iku(x) = o\left(|x|^{-1}\right),\ |x| \to \infty. \tag{4}$$

Условия (3) соответствуют рассеянным волнам (уходящим в бесконечность), а условия (4) – падающим волнам (приходящим из бесконечности). Заметим, что для гармонических функций ($k = 0$) условия излучения вытекают только из одного требования: $u(\infty) = 0$. С другой стороны, можно показать [2], что при $k > 0$ всякое решение однородного уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее второму из условий излучения (4), удовлетворяет и первому условию, так как $u(x) = O\left(|x|^{-1}\right)$.

Однородное уравнение Гельмгольца. Решения однородного уравнения Гельмгольца (2) обла-дают свойствами, аналогичными свойствам гармонических функций. Отметим некоторые из них.

а) Если функция $u \in C(\Omega)$ *удовлетворяет в области* Ω *уравнению* (2) *в обобщенном смысле, то* $u \in C^\infty(\Omega)$.

b) Пусть граница$\partial\Omega$ *области* Ω*–- достаточно гладкая поверхность. Если функция* $u \in C(\overline{\Omega})$ *удовлетворяет в области* Ω *уравнению* (2) *и имеет правильную нормальную производную на S, то справедливы формулы*

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\int_S \left[\mathrm{E}(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} - u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathrm{E}(x-y) \right] dS_y,$$

$$\bar{u}(x)=\frac{1}{4\pi}\int_S\left[\bar{E}(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}-u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\bar{E}(x-y)\right]dS_y\,,$$

где $E(x)$ и $\bar{E}(x)$ – фундаментальное решение оператора Гельмгольца, удовлетворяющее условию излучения Зоммерфельда (3) и (4), соответственно. Например, в трехмерном пространстве, соответствующие фундаментальные решения выражаются формулами

$$E(x)=-\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|},\quad \bar{E}(x)=-\frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|}.$$

с) Если граница $\partial\Omega$ области Ω – достаточно гладкая поверхность, функция $u\in C(\Omega_1)$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца в области $\Omega_1=R^3\setminus\bar{\Omega}$, имеет правильную нормальную производную на $\partial\Omega$, $u|_{\partial\Omega}=0$ или $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0$, то $u(x)=0,\ x\in\Omega_1$.

Потенциалы. Пусть $f\in L_2(R^3)$. Интегралы

$$u(x)=\int_{R^3}E(x-y)f(y)dy\,,\quad \bar{u}(x)=\int_{R^3}\bar{E}(x-y)f(y)dy\,,$$

являются аналогами ньютоновых потенциалов для случая уравнения Гельмгольца.

При этом решение единственно в классе обобщенных функций, удовлетворяющих условиям излучения (3) или (4).

Если $f\in C(\bar{\Omega})$ и $f(x)=0$, $x\in\Omega_1=R^3\setminus\bar{\Omega}$, то потенциалы V и $\bar{V}$ выражаются интегралами

$$V(x)=\int_{\Omega}E(x-y)f(y)dy\,,\qquad(5)$$

$$\bar{V}(x)=\int_{\Omega}\bar{E}(x-y)f(y)dy\,.\qquad(6)$$

Эти потенциалы принадлежат классу $C^1(R^3)\cap C^\infty(\Omega_1)$, удовлетворяют в области Ω_1 однородному уравнению (2) *и условиям* (3) и (4) *соответственно.*

Это утверждение доказывается так же, как и для объемного ньютонова потенциала.

С помощью фундаментальных решений $E(x)$ *и* $\bar{E}(x)$ могут быть построены аналоги поверх-ностных потенциалов простого и двойного слоя. Они выражаются интегралами:

$$V^{(0)}(x)=\int_{\partial\Omega}E(x-y)\mu(y)dS_y\,,\quad \bar{V}^{(0)}(x)=\int_{\partial\Omega}\bar{E}(x-y)\mu(y)dS_y\,,$$

$$V^{(1)}(x)=\int_{\partial\Omega}\nu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathrm{E}(x-y)dS_y\,,\;\; \overline{V}^{(1)}(x)=\int_{\partial\Omega}\nu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\overline{\mathrm{E}}(x-y)dS_y\,.$$

Свойства потенциалов $V^{(0)}$, $\overline{V}^{(0)}$, $V^{(1)}$ и $\overline{V}^{(1)}$ аналогичны свойствам соответствующих ньютоновых потенциалов. *Вне поверхности* $\partial\Omega$ *эти потенциалы бесконечно дифференцируемы, удовлетворяют однородному уравнению* (2) *и условиям излучения* (3) и (4) *соответственно, при-чем* $V^{(0)}$ *и* $\overline{V}^{(0)}\in C(R^3)$. *Если* $\partial\Omega$ *– поверхность Ляпунова, то потенциалы* $V^{(0)}$ *и* $\overline{V}^{(0)}$ *имеют пра-вильную нормальную производную на* $\partial\Omega$ *извне и изнутри* $\partial\Omega$ *и эти производные равны соот-ветственно*

$$\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n}\right)_{\pm}(x)=\mp\frac{\mu(x)}{2}+\int_{\partial\Omega}\mu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\mathrm{E}(x-y)dS_y\,, \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial \overline{V}^{(0)}}{\partial n}\right)_{\pm}(x)=\mp\frac{\mu(x)}{2}+\int_{\partial\Omega}\mu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\overline{\mathrm{E}}(x-y)dS_y\,. \tag{8}$$

Потенциалы двойного слоя $V^{(1)}$ *и* $\overline{V}^{(1)}$ *принадлежат классу* $C(\overline{\Omega})\cap C(\overline{\Omega}_1)\cap C(\partial\Omega)$, *и их пре-дельные значения на* $\partial\Omega$ *извне и изнутри* $\partial\Omega$ *равны соответственно*

$$V^{(1)}_{\pm}(x)=\pm\frac{\nu(x)}{2}+\int_{\partial\Omega}\nu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathrm{E}(x-y)dS_y\,, \tag{9}$$

$$\overline{V}^{(1)}_{\pm}(x)=\pm\frac{\nu(x)}{2}+\int_{\partial\Omega}\nu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\overline{\mathrm{E}}(x-y)dS_y\,. \tag{10}$$

Одним из основных результатов данного параграфа является

Теорема 1. *Для любой функции* $f\in L_2(\Omega)$ *объемный потенциал (5) удовлетворяет граничному условию*

$$-\frac{1}{2}u(x)+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\mathrm{E}(x-y)}{\partial n_y}u(y)dS_y-\int_{\partial\Omega}E(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}dS_y=0,\;\; x\in\partial\Omega. \tag{11}$$

Обратно, если $k^2\neq\lambda^D$ *функция* $u\in W_2^2(\Omega)$ *удовлетворяет уравнению (1) и граничному условию (11), то она определяет объемный потенциал (5).*

Здесь λ^D – собственные значения задачи Дирихле в Ω

$$-\Delta u=\lambda^D u,\; x\in\Omega\,;$$

$$u(x)=0,\; x\in\partial\Omega\,,$$

а $\dfrac{\partial}{\partial n_y}$ – производная по направлению внешней нормали к $\partial\Omega$.

Доказательство теоремы 1. Предполагая сначала, что $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, непосредственным вычислением при любом $x \in \Omega$ находим

$$u(x) = \int_\Omega \mathrm{E}(x-y) f(y)dy = -\int_\Omega \mathrm{E}(x-y)\Delta u(y)dy - \int_\Omega k^2 \mathrm{E}(x-y)u(y)dy =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathrm{E}(x-y)}{\partial n_y} u(y)dS_y - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \mathrm{E}(x-y)dS_y - \int_\Omega \left((\Delta_y + k^2)\mathrm{E}(x-y)\right)u(y)dy =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathrm{E}(x-y)}{\partial n_y} u(y)dS_y - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \mathrm{E}(x-y)dS_y + u(x) =$$

$$= u(x) + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \mathrm{E}(x-y)}{\partial n_y} u(y) - \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \mathrm{E}(x-y) \right) dS_y\,,$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n_y} = n_1 \dfrac{\partial}{\partial y_1} + n_2 \dfrac{\partial}{\partial y_2} + n_3 \dfrac{\partial}{\partial y_3}$ – нормальная производная, а n_1, n_2, n_3 – составляющие единичной внешней нормали. Отсюда находим

$$I_u(x) = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \mathrm{E}(x-y)}{\partial n_y} u(y) - \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \mathrm{E}(x-y) \right) dS_y \equiv 0,\ x \in \Omega. \tag{12}$$

Так как $\Delta_x E(x-y) = 0$ при $x \neq y$ и $\Delta_x \dfrac{\partial \mathrm{E}(x-y)}{\partial n_y} = 0$ при $x \neq y$, то имеем

$$\Delta_x I_u(x) \equiv 0\,.$$

Используя свойства потенциала двойного слоя (9), из (12) при $\mathrm{x} \to \partial\Omega$, находим

$$I_u(x) = -\frac{1}{2}u(x) + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \mathrm{E}(x-y)}{\partial n_y} u(y) - \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \mathrm{E}(x-y)\right)dS_y = 0,\ \ x \in \partial\Omega\,. \tag{13}$$

Так как $I_u(x)$ решение однородного уравнения Гельмгольца, то в силу единственности решения задачи Дирихле $\left(k^2 \neq \lambda^D\right)$, тождество $I_u(x) \equiv 0$ равносильно соотношению (13), т.е. соотношение $I_u(x)\big|_{x \in \partial\Omega} = 0$ является граничным условием объемного потенциала (5).

Далее, предельным переходом несложно показать, что формула (13) остается справедливой и для всех $u \in W_2^2(\Omega)$.

Таким образом, объемный потенциал (5) удовлетворяет граничному условию (11).

Обратно покажем, что если функция $u_1 \in W_2^2(\Omega)$ удовлетворяет уравнению $\Delta u_1 + k^2 u_1 = -f$ и граничному условию (11), то она совпадает с объемным потенциалом (5).

Действительно, если не так, то функция $v = u - u_1 \in W_2^2(\Omega)$, где $u = \mathrm{E} * f$ объемный потенциал, удовлетворяет однородному уравнению $(\Delta + k^2)v(y) = 0$ и однородному условию (11).

Применив формулу Грина к функции $v \in W_2^2(\Omega)$, как и выше, убеждаемся в том, что

$$0 = -\int_{\Omega} \mathrm{E}(x-y)\big((\Delta + k^2)v(y)\big)dy = -\int_{\Omega} \mathrm{E}(x-y)\Delta v(y)dy - \int_{\Omega} k^2 \mathrm{E}(x-y)v(y)dy =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathrm{E}(x-y)}{\partial n_y} v(y)dS_y - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v(y)}{\partial n_y} \mathrm{E}(x-y)dS_y - \int_{\Omega} \big((\Delta_y + k^2)\mathrm{E}(x-y)\big)v(y)dy =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathrm{E}(x-y)}{\partial n_y} v(y)dS_y - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v(y)}{\partial n_y} \mathrm{E}(x-y)dS_y + v(x) =$$

$$= v(x) + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \mathrm{E}(x-y)}{\partial n_y} u(y) - \frac{\partial v(y)}{\partial n_y} \mathrm{E}(x-y) \right) dS_y = v(x) + I_v(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

То есть,

$$v(x) + I_v(x) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Отсюда, переходя к пределу при $x \to \partial\Omega$, получим

$$v(x) - \frac{1}{2}v(x) + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \mathrm{E}(x-y)}{\partial n_y} v(y) - \frac{\partial v(y)}{\partial n_y} \mathrm{E}(x-y)\right)dS_y = v(x) + I_v(x)\ \Big|_{x\in\partial\Omega} = 0. \tag{14}$$

Из условия (11) имеем $I_v(x)\ \big|_{x\in\partial\Omega} = 0$ и поэтому из (14) следует, что $v(x) \equiv 0, \forall x \in \partial\Omega$. В силу единственности решения задачи Дирихле $\left(k^2 \neq \lambda^D\right)$ для уравнения Лапласа, отсюда вытекает, что $v = u - u_1 \equiv 0, \quad \forall x \in \Omega$, Поэтому $u_1 \equiv u$, то есть совпадает с объемным потенциалом.

Теорема 1 доказана.

Следует отметить, что объемный потенциал (5) удовлетворяет краевому условию (11), не зависить от того, что $k^2 \neq \lambda^D$ или $k^2 = \lambda^D$ [3,4]. Однако в первом случае потенциал (5) однозначно определяется из уравнения (1) и условия (11). Во втором же случае решение уравнения (1) с условиям (11) существует для любой правой части $f \in L_2(\Omega)$, однако не единственно и определяется с точностью до слагаемого, пропорционального собственным функциям задачи Дирихле, соответствующим собственным значением λ^D. Так как собственные значения λ^D изменяются с изменением области Ω, то для любых фиксированных значений k^2 можно всегда выбрать такие области Ω, что $k^2 \neq \lambda^D$.

Также отметим, что условия $k^2 \neq \lambda^D$ являются естественными для краевых задач во внешности ограниченной области с условиями излучения Зоммерфельда на бесконечности.

ЛИТЕРАТУРА

1 Безменов И.В. Перенос условий излучения Зоммерфельда на искусственную границу области, основанный на вариационном принципе // Математический сборник. – 1994. – № 185(3). – С. 3-24.

2 Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.

3 Кальменов Т.Ш., Сураган Д. К спектральным вопросам объемного потенциала // Доклады академии наук. – 2009. – Т. 428, № 1. – С. 16-19.

4 Kal'menov T.Sh., Suragan D. A boundary condition and spectral problems for the Newton potentials, Operator theory: Advances and applications. – 2011. – Vol. 216. – P. 187-210.

REFERENCES

1 Bezmenov I.V. Perenos uslovii izluchenija Zommerfel’da na iskusstvennuiu granitsu oblasti, osnovannyi na variatsionnom printsipe // Matematicteskii sbornik. – 1994. – N 185(3). – S. 3-24.

2 Vladimirov V.S. Uravnenija matematicheskoi fiziki. – M.: Nauka, 1981 (in Russ).

3 Kal'menov T.Sh., Suragan D. K spektral'nym voprosam ob’emnogo potenciala // Doklady akademii nauk. – 2009. – T. 428, № 1. – S. 16-19 (in Russ).

4 Kal'menov T.Sh., Suragan D. A boundary condition and spectral problems for the Newton potentials, Operator theory: Advances and applications. – 2011. – Vol. 216. – P. 187-210.

Резюме

Д. Сураган[1,2]

([1]ҚР БҒМ Математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы қ.;

[2]әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ.)

ЗОММЕРФЕЛЬДТІҢ ШЕКТЕЛГЕН АЙМАҚТА СӘУЛЕЛЕНУ ШАРТЫНЫҢ ТИЯНАҚТЫ ТАСЫМАЛДАУ ЕСЕБІНІҢ ШЕШІМІ

Шектеулі үш өлшемді тегіс шекарамен облыста біртекті емес Гельмгольц теңдеуін шешу үшін шекара-лық шарттың жаңа қойылымы ұсынылды. Осы шекаралық шарттар шекарадан шағылысқан толқындарды тұншықтыру сипатымен қабілетті. Ұсынылған жағдайда классикалық шешімнің болуы және оның жалғыздықтығы дәлелденген. Осы шешім кез келген шектеулі облыстың ішінде шектеусіз Зоммерфельдтің сәулелену шарты бар облыстағы есептің шешімімен сәйкес келетіндігі көрсетілген. Гельмгольц теңдеуі үшін көлемді әлеуеттің шекаралық шарттары сипатталған.

Кілт сөздер: Гельмгольц теңдеуі, Зоммерфельдтің сәулелену шарты, жергілікті емес түрдегі шекаралық шарттар.

Summary

D. Suragan[1,2]

([1] Al-Farabi Kazakh national university, Almaty;

[2]Institute of mathematics of the Ministry of Education And Science of The Republic of Kazakhstan, Almaty)

THE SOLUTION OF EXPLICIT TRANSLATION OF SOMMERFELD RADIATION CONDITIONS PROBLEM ON BOUND OF BOUNDED DOMAIN IN A SPACE

To solve non-homogeneous Helmholtz equation in any bounded three-dimensional domain with sufficiently smooth boundary we offer a new statement of boundary conditions which have property to suppress waves reflected from the boundary. Also there are proved existence and uniqueness of the classical solution of problems under such conditions. In addition, we show that this solution inside of bounded domain coincides with the solution (with radiated solution) of problem posed in any non-bounded domain with the Sommerfeld radiation condition. In addition, we describe boundary conditions of the volume potential for the Helmholtz equation.

Keywords: Helmholtz equation, Sommerfeld radiation condition, boundary conditions of non-local type.

Поступила 18.04.2013г