УДК 539.171

Н. Ж. ТАКИБАЕВ

РЕШЕНИЕ КВАНТОВОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ЛЕГКОЙ ЧАСТИЦЫ НА ТРЕХ ФИКСИРОВАННЫХ ЦЕНТРАХ

Метод точных решений квантовой задачи рассеяния трех частиц обобщается на задачи рассеяния в системе 4-х частиц, одна из которых легкая, а три другие очень тяжелые. Решения определяются в аналитической форме, так же, как и в задаче 3-х частиц, и показывается, что в области рассеяния в системе возникают серии новых резонансов, параметры которых (т.е. энергии и ширины) являются функциями от расстояний между парами тяжелых частиц. Обсуждаются эффекты, обязанные существованию этих новых резонансов, и интересные возможности их практических приложений.

Введение. Ранее (см. [1-3]), точные решения в аналитическом виде были получены в квантовых задачах рассеяния 3-х частиц, когда одна из частиц являлась легкой, а две другие очень тяжелыми. Точно-решаемая модель возникала в случае парных потенциалов, имеющих сепарабельную, т.е. «расщепленную» форму. Так, в общей задаче рассеяния трех тел была определена модель, допускающая определение решений до конца [1]. Это означает, что решения выражаются в аналитической форме, не требуют численного решения интегральных уравнений и позволяют аналитически определить особенности, например, полюса матрицы рассеяния.

В данной работе модель обобщается на задачи 4-х частиц, когда рассеивающих центров становится на одну больше, т.е. рассеяние легкой частицы рассматривается на системе, состоящей уже из 3-х очень тяжелых частиц. Как и в задаче рассеяния легкой частицы на двух тяжелых центрах, здесь также возникают серии новых резонансов, параметры которых зависят от взаиморасположения пар тяжелых центров. В случае двух тяжелых рассеивающих центров их характеристической величиной является расстояние между центрами [1, 4]. Однако, в случае трех тяжелых рассеивающих центров число таких характеристических параметров уже равно трем, соответственно числу тяжелых пар.

Существенно, что указанные серии резонансов не имеют места в простой парной задаче рассеяния, когда легкая частица рассеивается на одном тяжелом центре.

Таким образом, в задачах трех и большего числа частиц возникает зависимость амплитуд и сечений рассеяния от макро характеристик рассеивающей структуры. Это является связующим звеном между традиционной квантовой теорией рассеяния и теориями взаимодействия частиц в организованных средах, которые называют монокристаллами и наноструктурами в физике твердого тела, и возникает связь, в частности, с квантовыми точками, квантовыми ямами и т.п.

1. Определение связной части в задаче рассеяния легкой частицы на системе тяжелых частиц. Для определенности будем предполагать рассмотрение конкретной физической задачи, а именно, модельной задачи резонансного рассеяния нейтронов на тяжелых ядрах, фиксированных пространстве, например, в узлах кристаллической структуры. В соответствии с этим и будем вести нижеследующие математические выкладки.

Зададим исходные условия задачи:

а) считаем известными 2-х частичные амплитуды рассеяния в nA_i - подсистемах. Здесь i - номер атома ($i = 1,2,3,...$), с ядром которого взаимодействует нейтрон (легкая частица). Индекс, отвечающий нейтрону во взаимодействии с ядром атома номера i, будем либо опускать, либо его присутствие обозначать индексом ni, т.е. потенциал взаимодействия нейтрона с этим ядром обозначать - V_i;

б) взаимодействия между ядрами атомов будем считать отсутствующими, а сами атомы фиксированными в узлах кристаллической решетки;

в) столкновениями нейтронов с электронами внутри кристалла и электронами атомных оболочек мы будет пренебрегать;

г) тепловыми колебаниями атомов в узлах решетки и взаимодействиями нейтронов с фононами решетки мы также пренебрежем.

Можно считать, что указанные в пунктах б)–г) взаимодействия являются малыми при низких температурах и в силу малости отношения массы

электрона к массе нейтрона. Эти взаимодействия опущены для того, чтобы определить на первом этапе главные решения, которые мы попытаемся найти точно и в аналитической форме. Эти малые взаимодействия могут быть учтены по теории возмущений, и их воздействие может быть оценено с требуемой точностью [1, 4, 5].

Мы примем во внимание здесь лишь парные взаимодействия между нейтроном и ядрами атомов, жестко стоящими в узлах кристаллической решетки.

Ранее [2-4] мы рассмотрели в аналогичной модели трех частичные нейтронные резонансы. В следующем разделе мы продолжим анализ и рассмотрим четырех частичные взаимодействия, т.е. взаимодействия нейтрона с подсистемой, состоящей из ядер трех атомов, фиксированных в конфигурационном пространстве. Нашей задачей будет вывод корректных уравнений для этой модельной задачи, получение точных аналитических решений, анализ отличий от решений задачи трех тел и определение вклада третьего рассеивающего центра.

Будем исходить из уравнения Липпмана-Швингера для системы 4-х частиц:

$$T = V + VG_0T \text{, где } V = \sum_i V_{ni} = \sum V_i . \quad (1)$$

Так как уравнение Липпмана-Швингера может быть записано в симметричной форме, то оно может быть представлено также в виде:

$$T = V + TG_0V . \quad (2)$$

Очевидно тогда, что полную T-матрицу можно записать в форме следующей суммы $T = \sum T_{ij}$, где $i, j = 1,2,3$, а из уравнения (1) получить уравнения для компонент:

$$T_{ij} = V_i\delta_{ij} + \sum_{l=1}^{3} V_iG_0T_{lj} =$$

$$= V_i\delta_{ij} + V_iG_0T_{ij} + \sum_{l=1}^{3} V_iG_0\bar{\delta}_{il}T_{lj} , \quad (3)$$

где δ_{ij} - символ Кронекера, а $\bar{\delta}_{il} = 1 - \delta_{il}$ часто называют символом анти Кронекера. Отметим, что уравнение (3) так же, как и уравнения (1) или (2), еще содержит слагаемые, в которых некоторые подсистемы могут быть не связаны между собой общим взаимодействием. Соответствующие слагаемые обычно называют несвязными, и им отвечают несвязные диаграммы [6,7].

Перегруппировкой Фаддеева [6, 7] можно свести уравнения (3) к форме, удовлетворяющей требованиям однозначности и единственности решений.

Сначала выделим несвязные ядра в подсистемах, состоящих из трех частиц – нейтрона и двух атомов, считая третий атом не участвующим во взаимодействии с нейтроном. Для этого перенесем, например, второе слагаемое справа в уравнении (3) в его левую часть и получим:

$$(I - V_iG_0)T_{ij} = V_i\delta_{ij} + \sum_{l=1}^{3} V_iG_0\bar{\delta}_{il}T_{lj} . \quad (4)$$

Далее, используя операторные равенства и соотношения для парных t_i-матриц и функций Грина:

$$(I - V_iG_0) = (G_0^{-1} - V_i)\cdot G_0 = G_i^{-1}\cdot G_0 ,$$

$$G_iV_i = G_0t_i \quad (5)$$

запишем уравнения для компонент полной амплитуды в форме:

$$T_{ij} = G_0^{-1}G_iV_i\{\delta_{ij} + \sum_{l=1}^{3} G_0\bar{\delta}_{il}T_{lj}\} =$$

$$= t_i\delta_{ij} + \sum_{l=1}^{3} t_iG_0\bar{\delta}_{il}T_{lj} . \quad (6)$$

Отметим, что ядро интегрального уравнения (6), в отличие от ядер уравнений (1) или (3), становится связным по индексам i и j. В задаче трех тел указанная процедура сразу же приводит к квадратично интегрируемым ядрам. Однако, в задаче 4-х тел требуется связать еще одну частицу номера $l \neq i, j$, где $i, j, l = 1,2,3$. Для этого проведем дополнительную перегруппировку.

Выделим, справа в (6), ядра, которые имеют только трех частичную связь (т.е. не имеющих связи с четвертой частицей). Выпишем диагональные компоненты T_{ii} из уравнения (6):

$$T_{ii} = t_i + \sum_{l=1}^{3} t_iG_0\bar{\delta}_{il}T_{li} , \quad (7)$$

и недиагональные компоненты $\bar{\delta}_{ij}T_{ij}$

$$\bar{\delta}_{ij}T_{ij} = \quad (8)$$

$$= \sum_{l=1}^{3} t_iG_0\bar{\delta}_{il}T_{lj} = t_iG_0\bar{\delta}_{jl}T_{lj} + \sum_{l=1}^{3} t_iG_0\bar{\delta}_{il}\bar{\delta}_{lj}T_{lj} .$$

Отметим, что для определения полной T-матрицы достаточно найти сначала недиагональные компоненты из (8), и уже затем определить диагональные компоненты из (7).

Подставляя (7) в (8), получим для недиагональных элементов уравнения:

$$\bar{\delta}_{ij}T_{ij} = t_i G_0 \bar{\delta}_{ji} t_j + t_i G_0 \bar{\delta}_{ji} t_j G_0 \sum_{l=1}^{3} \bar{\delta}_{lj} T_{lj} + \sum_{l=1}^{3} t_i G_0 \bar{\delta}_{il} \bar{\delta}_{lj} T_{lj}, \quad (9)$$

или, выделяя несвязную часть (из второго слагаемого справа), получим:

$$\bar{\delta}_{ij}T_{ij} = t_i G_0 \bar{\delta}_{ji} t_j + t_i G_0 \bar{\delta}_{ji} t_j G_0 \bar{\delta}_{ij} T_{ij} + t_i G_0 \bar{\delta}_{ji} t_j G_0 \sum_{l=1}^{3} \bar{\delta}_{il} \bar{\delta}_{lj} T_{lj} + \sum_{l=1}^{3} t_i G_0 \bar{\delta}_{il} \bar{\delta}_{lj} T_{lj}. \quad (10)$$

Запишем (10) в форме:

$$(I - t_i G_0 \bar{\delta}_{ji} t_j G_0)\ \bar{\delta}_{ij} T_{ij} = t_i G_0 \bar{\delta}_{ji} t_j + t_i G_0 \bar{\delta}_{ji} t_j G_0 \sum_{l=1}^{3} \bar{\delta}_{il} \bar{\delta}_{lj} T_{lj} + \sum_{l=1}^{3} t_i G_0 \bar{\delta}_{il} \bar{\delta}_{lj} T_{lj}. \quad (11)$$

Отметим, что определение двух последних слагаемых в правой части (11) в форме $t_i G_0 \bar{\delta}_{il} \bar{\delta}_{lj} T_{lj}$ ведет к связности этих величин. Действительно, здесь ядра всех трех атомов уже будут задействованы в суммарном взаимодействии.

Проведем дальнейшую редукцию Фаддеева, отделяя чисто трех частичные $T_{ij;3}$-матрицы от компонент T_{ij} полной T-матрицы четырех частиц. Запишем по аналогии с (7) и (8) диагональные и недиагональные компоненты T- матриц для трех частичной системы:

$$T_{ii;3} = t_i + t_i G_0 \bar{\delta}_{ji} T_{ji;3}, \quad \bar{\delta}_{ij} T_{ij;3} = t_i G_0 \bar{\delta}_{ji} T_{ji;3}, \quad (12)$$

и получим операторное соотношение для величины $\bar{\delta}_{ij} T_{ij;3}$:

$$\bar{\delta}_{ij} T_{ij;3} = \frac{1}{I - t_i G_0 \bar{\delta}_{ji} t_j G_0} t_i G_0 \bar{\delta}_{ji} t_j. \quad (13)$$

Теперь, с учетом (13), из (11) следует

$$\bar{\delta}_{ij} T_{ij} = \bar{\delta}_{ij} T_{ij;3} + (\bar{\delta}_{ij} T_{ij;3} + T^{j}_{ii;3})\, G_0 \sum_{l=1}^{3} \bar{\delta}_{il} \bar{\delta}_{lj} T_{lj}, \quad (14)$$

где

$$T^{j}_{ii;3} = \frac{1}{I - t_i G_0 \bar{\delta}_{ji} t_j G_0} t_i. \quad (15)$$

Уравнение (14) ведет при итерациях к связным ядрам интегральных уравнений, что соответственно, отвечает условиям однозначности и существованию решений. Это ясно следует из уравнения для связных частей компонент ΔT_{ij}, где $T_{ij} = T_{ij;3} + \Delta T_{ij}$ $(i \neq j)$:

$$\Delta T_{ij} = (\bar{\delta}_{ij} T_{ij;3} + T^{j}_{ii;3})\ G_0 \sum_{l=1}^{3} \bar{\delta}_{il} \bar{\delta}_{lj} T_{lj;3} + (\bar{\delta}_{ij} T_{ij;3} + T^{j}_{ii;3})\ G_0 \sum_{l=1}^{3} \bar{\delta}_{il} \bar{\delta}_{lj} \Delta T_{lj}. \quad (16)$$

Что касается диагональных компонент $T_{ii} = T^{j}_{ii;3} + \Delta T_{ii}$, то эти компоненты могут быть определены из следующих соотношений:

$$T_{ii} = t_i + t_i G_0 \sum_{l=1}^{3} \bar{\delta}_{il} T_{il} = T^{j}_{ii;3} + t_i G_0 \sum_{l=1}^{3} \bar{\delta}_{il} \bar{\delta}_{lj} (T_{ii;3} + \Delta T_{ii}), \quad (17)$$

или

$$\Delta T_{ii} = t_i\, G_0 \sum_{l=1}^{3} \bar{\delta}_{il} \bar{\delta}_{lj} (T_{ii;3} + \Delta T_{ii}). \quad (18)$$

Важно отметить, что недиагональные компоненты (см. (16)) определяются независимо от диагональных компонент. Последние могут быть найдены из соотношений (17) и (18), если известны недиагональные компоненты. В случае, если включаются дополнительные парные взаимодействия, например, между ядрами атомов, то ситуация значительно усложняется, поскольку вариантов разбиений на подсистемы становится существенно больше. Теория 4-х и более взаимодействующих тел развита достаточно подробно и математически строго [7].

В рассматриваемой здесь модельной 4-х тельной задаче технических трудностей не возникает, и приведенный выше переход к компактным уравнениям приведен, поскольку в модели предполагается дальнейшее упрощение задачи с целью получения точных аналитических решений и их возможных приложений к некоторым практическим примерам.

2. Переход к модельной задаче, допускающей точные аналитические решения. Как и в случае задачи трех тел (см. [1-4]) мы упростим задачу 4-х тел, принимая сепарабельную форму парных нейтрон-ядерных потенциалов и переходя к пределу Борна-Оппенгеймера $\zeta = m/M \to 0$, где m - масса нейтрона, а M - масса атомного ядра. Более точно, M - это эффективная масса атомного ядра, фиксированного в узле кристаллической решетки.

Заметим, что в кристалле весь домен кристалла принимает на себя импульс отдачи нейтрона, т.е. эффективная (результирующая) масса узла будет намного большей, чем масса отдельного ядра. Этот структурный фактор или, лучше сказать, кинематическое явление, как известно, является ключевым для эффекта Мёссбауэра.

В отличие от эффекта Мёссбауера или, точнее, в дополнение к нему, в нашем случае сами нейтронные резонансы формируются динамически на группах ядер (далее, структурные нейтронные резонансы), и они должны быть соизмеримы с соответствующими размерами этих структур. Ясно, что в формате энергетических масштабов их характеристики также должны быть соизмеримы. Отметим, что характерные размеры кристаллических структур определяются межатомными связями, что в энергетическом формате соответствует по порядку величины энергии Боровского электрона. Но энергии нейтронных резонансов, включая и структурные резонансы, намного больше энергии связи такого электрона. Поэтому проявление структурных нейтронных резонансов будет маловероятным в реальных кристаллах, но их можно будет обнаружить экспериментально лишь при очень больших давлениях, когда расстояния между ядрами будут значительно меньшими.

Здесь предполагается, что решетка кристалла должна находиться под очень высоким давлением, чтобы могли проявиться нейтронные структурные резонансы. Именно такая ситуация является характерной для верхних слоев очень плотных звезд, в частности, для нейтронных звезд.

Нашей задачей будет изучить теоретически, как меняются характеристики нейтронных резонансов в рассматриваемой 4-хтельной системе при изменениях параметров решетки, например, при сдавливании. Ранее, такие изменения и возникновение новых резонансов были продемонстрированы в аналогичной задаче 3-х тел [1, 2].

Обращаясь к нашей модельной задаче, мы допустим, что парные нейтрон-ядерные потенциалы имеют сепарабельную форму. Заметим, что Брейт-Вигнеровская форма нейтрон-ядерных резонансов отвечает принятому допущению [2, 3].

Итак, пусть парные t_i-матрицы представимы в сепарабельном виде:

$$t_i = |\nu_i > \eta_i(E) < \nu_i| \,. \qquad (19)$$

Здесь $\eta_i(E)$ - коэффициент усиления, а E- начальная кинетическая энергия нейтрона. В приближении Борна-Оппенгеймера кинетической энергией тяжелых атомов можно пренебречь.

Рассмотрим решения задачи трех тел, т.е. упрощения для матриц $T_{ij;3}$. В случае парных t_i-матриц из (19) уравнения (12) для недиагональных компонент принимают вид:

$$T_{ij;3} = t_i G_0 \overline{\delta}'_{ji} t_j + t_i G_0 \overline{\delta}_{ji} t_j G_0 \overline{\delta}_{ij} T_{ij;3} \,. \qquad (20)$$

Из структуры выражения в правой части (20) ясно следует структура матрицы $T_{ij;3}$:

$$T_{ij;3} = |\nu_i > \eta_i P_{ij} \, |\eta_j < \nu_j| \,. \qquad (21)$$

Обозначая $A_{ij} = <\nu_i | G_0 \overline{\delta}_{ji} | \nu_j>$, получим из (20) для амплитуд P_{ij} уравнения:

$$P_{ij} = A_{ij} + A_{ij} \eta_j A_{ji} \eta_i P_{ij} \,, \qquad (22)$$

а для диагональных компонент соотношения (см. [1, 4]):

$$T^j_{ii;3} = |\nu_i > \eta_i < \nu_i| + |\nu_i > \eta_i P^j_{ii} \eta_i < \nu_i|,$$

$$P^j_{ii} = A_{ij} \eta_j P_{ji} \,. \qquad (23)$$

Теперь, обратимся к задаче 4-х тел. Запишем ΔT_{ij} для $j \neq i$ из (16), с учетом представлений (19)-(22), в следующей форме:

$$\Delta T_{ij} = \{|\nu_i > \eta_i < \nu_i| + |\nu_i >$$
$$> \eta_i P^j_{ii} \eta_i < \nu_i| + |\nu_i > \eta_i P_{ij} \eta_j < \nu_j|\} \times$$
$$\times G_0 \overline{\delta}_{ii} \overline{\delta}_{ij} \{|\nu_i > \eta_i P_{ij} \eta_j < \nu_j| + \Delta T_{ij}\}. \qquad (24)$$

Очевидно, что амплитуды ΔT_{ij} могут быть представлены в виде аналогичном (19), т.е.

$$\Delta T_{ij} = |\nu_i > \eta_i R^i_{ij} \eta_j < \nu_j| \,, \qquad (25)$$

и тогда для амплитуд R^i_{ij} следуют уравнения:

$$R_{ij}^{l} = \{< \nu_i \mid + P_{ii}^{j} \eta_l < \nu_i \mid + P_{ij} \eta_j < \nu_j \mid \} \times$$
$$\times G_0 \bar{\delta}_{ii} \bar{\delta}_{ij} \mid \nu_l > \eta_l \{P_{ij} + R_{ij}^{j}\}, \quad (26)$$

или в краткой форме

$$R_{ij}^{l} = Q_{ii}^{j} \cdot \eta_l \cdot \{P_{ij} + R_{ij}^{j}\}, \quad (27)$$

где

$$Q_{ii}^{j} = (A_{ii} + P_{ii}^{j} \eta_l A_{ii} + P_{ij} \eta_j A_{ji}) \bar{\delta}_{ii} \bar{\delta}_{ij}. \quad (28)$$

Теперь, аналогичным образом получим из (18) соотношения и для амплитуд R_{ii}, полагая $\Delta T_{ii} = \mid \nu_i > \eta_i R_{ii} \; \eta_i < \nu_i \mid$. Имеем

$$R_{ii} = P_{ii}^{l} \bar{\delta}_{ij} + A_{ii} \bar{\delta}_{ii} \bar{\delta}_{ij} \eta_l R_{ii}^{j}. \quad (29)$$

Итак, основным является уравнение для недиагональных переходов, когда $i \neq j, l; j \neq l$ (см., напр. (27)). Подставим в правую часть (27) вместо R_{ii}^{j} такое же выражение для него, как и само (27). Получим:

$$R_{ij}^{l} = Q_{ii}^{j} \cdot \eta_l \cdot \{P_{ij} + R_{ij}^{j}\} =$$
$$= Q_{ii}^{j} \cdot \eta_l \cdot \{P_{ij} + Q_{ii}^{j} \cdot \eta_l \cdot \{P_{ij} + R_{ij}^{j}\}\} = \quad (30)$$
$$= Q_{ii}^{j} \cdot \eta_l \cdot P_{ij} + Q_{ii}^{j} \cdot \eta_l \cdot Q_{ii}^{j} \cdot \eta_l \cdot P_{ij} + Q_{ii}^{j} \cdot \eta_l \cdot Q_{ii}^{j} \cdot \eta_l \cdot R_{ij}^{j}.$$

В этом уравнении индексы и их порядок при компонентах амплитуды идентичны, т.е. уравнение (30) будет уравнением замкнутого типа, и оно может быть решено самостоятельно – т.е. без привлечения уравнений для других компонент, имеющих иной порядок индексов. Запишем (30) в краткой форме:

$$R_{ij}^{l} = \tilde{Q}_{ij}^{L} + \tilde{B}_{ii}^{jl} R_{ij}^{l}, \quad (31)$$

где

$$\tilde{Q}_{ij}^{l} = Q_{ii}^{j} \cdot \eta_l \cdot P_{ij} + Q_{ii}^{j} \cdot \eta_l \cdot Q_{ii}^{j} \cdot \eta_l \cdot P_{ij} \; ; \; B_{ii}^{jl} =$$
$$= Q_{ii}^{j} \cdot \eta_l \cdot Q_{ii}^{j} \cdot \eta_l. \quad (32)$$

Напомним, что метод получения решений в аналитическом виде связан с Фурье-преобразованием и переходом от импульсного представления к конфигурационному пространству. В этом случае ядро интегрального уравнения приобретает более сильную по характеру сингулярность, например, δ-функционную вместо сингулярности функции Грина. Это ведет, в свою очередь, к сокращению интегрирования по пространственным переменным тяжелых частиц. Таким образом, возникает существенное упрощение уравнений и, в конечном счете, возможность определения решений в аналитическом виде.

Указанная процедура была проведена при решении задачи трех тел, и мы повторим ее теперь в задаче 4-х тел. Проведем сначала Фурье преобразование в уравнениях (31). Запишем:

$$R_{ij}^{l}(\vec{r}_l, \vec{r}_j; \vec{r}_l\,', \vec{r}_i\,') = \int d\vec{p}_l d\vec{p}_j d\vec{p}_l\,' d\vec{p}_i\,' \times$$
$$\times \exp\{-i\vec{p}_l \vec{r}_l - i\vec{p}_j \vec{r}_j + i\vec{p}_l\,' \vec{r}_l\,' + \quad (33)$$
$$+ i\vec{p}_i\,' \vec{r}_i\,'\} R_{ij}^{l}(\vec{p}_l, \vec{p}_j; \vec{p}_l\,', \vec{p}_i\,'),$$

где штрихом обозначены координаты и импульсы ядер, взаимодействующих с нейтроном, уходящим из области рассеяния. Без штриха обозначены, соответственно, координаты и импульсы ядер, взаимодействующих с нейтроном, входящим в область рассеяния.

Отметим, что переменные номера *i*, первого на входе, и номера *j*, последнего на выходе нейтрона, в выражение (33) не входят. Это связано со свойством «расщепленности» (т.е. сепарабельности) парных потенциалов. При этом, указанные переменные замыкаются на форм-факторах амплитуды ΔT_{ij} в (25) на входе и выходе легкой частицы (здесь, нейтрона) из области взаимодействия. Отметим, что парные коэффициенты усиления $\eta_l(p_0)$ - зависят только от начального импульса нейтрона и не зависят от промежуточных значений импульсов или координат ядер. Поэтому, в наборе параметров R_{ij}^{l} остаются переменные $\vec{r}_l, \vec{r}_j; \vec{r}_l\,', \vec{r}_i\,'$, т.е. $R_{ij}^{l} = R_{ij}^{l}(\vec{r}_l, \vec{r}_j; \vec{r}_l\,', \vec{r}_i\,')$.

Уравнение (31) в координатном представлении можно переписать в виде:

$$R_{ij}^{l}(\vec{r}_l, \vec{r}_j; \vec{r}_l\,', \vec{r}_i\,') = \tilde{Q}_{ij}^{l}(\vec{r}_l, \vec{r}_j; \vec{r}_l\,', \vec{r}\,'_i) +$$
$$+ \int d\vec{r}_{ia} d\vec{r}_{jb} B_{ii}^{jl}(\vec{r}_l, \vec{r}_j; \vec{r}_{ia}, \vec{r}_{jb}) R_{ij}^{l}(\vec{r}_{ia}, \vec{r}_{jb}; \vec{r}_l\,', \vec{r}_i\,'). \quad (34)$$

Матричные величины Q_{ii}^{j} и B_{ii}^{jl} содержат δ-функции, которые существенно упрощают решение уравнений.

Определим вид Q_{ii}^{j} в координатном представлении. Приведем для этого выражения для A_{ij} и P_{ij}, которые были получены ранее при решении задачи 3-х тел [1, 2, 4]:

$$A_{ij}(\vec{r}_j; \vec{r}_i\,') = J_{ij}(\vec{r}_j) \cdot \delta(\vec{r}_j + \vec{r}_i\,'), \quad (35)$$

$$P_{\gamma}(\vec{r}_j;\vec{r}_i\,') = M^{+}_{\gamma}(\vec{r}_j)\cdot\delta(\vec{r}_j+\vec{r}_i\,'),$$

$$M^{+}_{\gamma} = \frac{1}{I-B^{j}_{\alpha}(\vec{r})}J_{\gamma}(\vec{r}), \qquad (36)$$

$$P_{\alpha}(\vec{r}_j;\vec{r}_j\,') = P^{j}_{\alpha}(\vec{r}_j;\vec{r}_j\,') = M^{-}_{\alpha}(\vec{r}_j)\cdot\delta(\vec{r}_j-\vec{r}_j\,'), \qquad (37)$$

$$M^{-}_{\alpha} = \frac{1}{I-B_{\alpha}(\vec{r})}B_{\alpha}(\vec{r})\eta_i^{-1}(p_0) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{I-B^{j}_{\alpha}(\vec{r})}B^{j}_{\alpha}(\vec{r})\eta_i^{-1}(p_0), \qquad (38)$$

где $i \neq j$ и

$$B^{j}_{\alpha}(\vec{r}_j) = J_{\gamma}(\vec{r})\eta_j(p_0)J_{\beta}(-\vec{r})\eta_j(p_0). \qquad (39)$$

Обобщение этих решений (35)-(39) на случай присутствия 4-ой частицы номера l, $l \neq i, j$, невзаимодействующей с подсистемой ij, сводится к их умножению на соответствующую δ-функцию. Например,

$$A_{\gamma}(\vec{r}_j,\vec{r}_l;\vec{r}_i\,',\vec{r}_l\,') \Rightarrow A_{\gamma}(\vec{r}_j;\vec{r}_l\,')\cdot\delta(\vec{r}_l-\vec{r}_l\,') =$$

$$= J_{\gamma}(\vec{r}_j)\cdot\delta(\vec{r}_j+\vec{r}_i\,')\cdot\delta(\vec{r}_l-\vec{r}_l\,'), \qquad (40)$$

и

$$P_{\gamma}(\vec{r}_j,\vec{r}_l;\vec{r}_i\,',\vec{r}_l\,') \Rightarrow P_{\gamma}(\vec{r}_j;\vec{r}_l\,')\cdot\delta(\vec{r}_l-\vec{r}_l\,') =$$

$$= M^{+}_{\gamma}(\vec{r}_j)\cdot\delta(\vec{r}_j+\vec{r}_i\,')\cdot\delta(\vec{r}_l-\vec{r}_l\,'). \qquad (41)$$

Тогда для Q^{j}_{α} получим выражение ($Q^{j}_{\alpha} = (A_{\alpha} + P^{j}_{\alpha}\eta_i A_{\alpha} + P_{\gamma}\eta_j A_{\beta})\bar{\delta}_{\alpha}\bar{\delta}_{\gamma}$, см. (28)):

$$Q^{j}_{\alpha}(\vec{r}_j,\vec{r}_l;\vec{r}_i\,',\vec{r}_j\,') = \{J_{\alpha}(\vec{r}_i)\cdot\delta(\vec{r}_i+\vec{r}_i\,')\cdot\delta(\vec{r}_j-\vec{r}_j\,') +$$

$$+\frac{1}{I-B^{j}_{\alpha}(\vec{r}_j)}B^{j}_{\alpha}(\vec{r}_j)J_{\alpha}(\vec{r}_i)\cdot\delta(\vec{r}_i+\vec{r}_i\,')\cdot\delta(\vec{r}_j-\vec{r}_j\,') +$$

$$\frac{1}{I-B^{j}_{\alpha}(\vec{r}_j)}J_{\gamma}(\vec{r}_j)\eta_j J_{\beta}(\vec{r}_i)\cdot\delta(\vec{r}_i+\vec{r}_j\,')\cdot\delta(\vec{r}_j+\vec{r}_i\,')\}\bar{\delta}_{\alpha}\bar{\delta}_{\gamma} \qquad (42)$$

или

$$Q^{j}_{\alpha}(\vec{r}_j,\vec{r}_l;\vec{r}_i\,',\vec{r}_j\,') =$$

$$= \frac{1}{I-B^{j}_{\alpha}(\vec{r}_j)}\cdot\{J_{\alpha}(\vec{r}_i)\cdot\delta(\vec{r}_i+\vec{r}_i\,')\cdot\delta(\vec{r}_j-\vec{r}_j\,') +$$

$$+J_{\gamma}(\vec{r}_j)\eta_j J_{\beta}(\vec{r}_i)\cdot\delta(\vec{r}_i+\vec{r}_j\,')\cdot\delta(\vec{r}_j+\vec{r}_i\,')\}\bar{\delta}_{\alpha}\bar{\delta}_{\gamma} \qquad (43)$$

при сокращении подобных членов.

Так как $\tilde{Q}^{l}_{\gamma} = Q^{l}_{\alpha}\cdot\eta_l\cdot P_{\gamma} + Q^{l}_{\alpha}\cdot\eta_l\cdot Q^{j}_{\alpha}\cdot\eta_i\cdot P_{\gamma}$; $B^{\beta}_{\alpha} = Q^{j}_{\alpha}\cdot\eta_l\cdot Q^{j}_{\alpha}\cdot\eta_i$, то подстановка соответствующих величин из (40)-(43) дает

$$R^{l}_{\gamma}(\vec{r}_i,\vec{r}_j;\vec{r}_i\,',\vec{r}_l\,') = \tilde{Q}^{l}_{\gamma}(\vec{r}_i,\vec{r}_j;\vec{r}_i\,',\vec{r}\,'_i) +$$

$$+\frac{1}{I-B^{j}_{\alpha}(\vec{r}_j)}\{[J_{\alpha}(\vec{r}_i)\cdot\eta_l\cdot\frac{1}{I-B^{j}_{\alpha}(\vec{r}_j)}J_{\alpha}(-\vec{r}_i) +$$

$$+J_{\gamma}(\vec{r}_j)\eta_j J_{\beta}(\vec{r}_i)\cdot\eta_l\times$$

$$\times\frac{1}{I-B^{j}_{\alpha}(-\vec{r}_i)}J_{\gamma}(-\vec{r}_i)\eta_j J_{\beta}(-\vec{r}_j)]\times$$

$$\times\eta_i\cdot R^{l}_{\gamma}(\vec{r}_i,\vec{r}_j;\vec{r}_i\,',\vec{r}_l\,') + J_{\alpha}(\vec{r}_i)\cdot\eta_l\times$$

$$\times\frac{1}{I-B^{j}_{\alpha}(\vec{r}_j)}J_{\gamma}(\vec{r}_j)\eta_j J_{\beta}(-\vec{r}_i)\cdot\eta_i\times$$

$$\times R^{l}_{\gamma}(-\vec{r}_j,\vec{r}_i;\vec{r}_i\,',\vec{r}_l\,') + J_{\gamma}(\vec{r}_j)\eta_j J_{\beta}(\vec{r}_i)\cdot\eta_l\times$$

$$\times\frac{1}{I-B^{j}_{\alpha}(-\vec{r}_i)}J_{\alpha}(-\vec{r}_j)\cdot\eta_i\cdot R^{l}_{\gamma}(\vec{r}_j,-\vec{r}_i;\vec{r}_i\,',\vec{r}_l\,')\}. \qquad (44)$$

Чтобы получить уравнения для компонент с другим знаком, нужно провести смену этих знаков, например, определяя:

$$R^{l}_{\gamma}(\vec{r}_i,\vec{r}_j;\vec{r}_i\,',\vec{r}\,'_i) \to R^{l}_{\gamma}(\vec{r}_j,-\vec{r}_i;\vec{r}_i\,',\vec{r}\,'_i)$$

$$\text{при } \vec{r}_i \to \vec{r}_j,\ \vec{r}_j \to -\vec{r}_i, \qquad (45)$$

нетрудно выписать соответствующие алгебраические уравнения типа (44) для всех нужных компонент. Результатом будет система алгебраических уравнений 4-ого ранга, решение которого выражается в несколько громоздкой, но аналитической форме.

Заключение. Таким образом, также как и в задаче трех тел, нам удалось в задаче 4-х тел свести систему сложных интегральных уравнений к системе алгебраических уравнений. Это позволяет провести решения до конца, т.е. получить решения задачи 4-х тел в аналитическом виде.

Важно отметить, что аналитические решения уравнений (44) позволяют в явной форме увидеть движение резонансных особенностей при изменении исходных параметров задачи и выявить новые аномалии в системе.

Развитый теоретический подход позволяет найти аномалии амплитуд, отвечающих резонансным состояниям нейтрона в системе тяжелых ядер. Можно расширить приложения данных

модельных задач для описания ряда интересных физических процессов и явлений.

Это задачи, которые представляют интерес для исследователей, как в практическом, так и в теоретическом плане. Например, резонансное рассеяние нейтронов на системе тяжелых ядер фиксированных в кристалле, в частности, когда парные нейтрон-ядерные амплитуды имеют Брейт-Вигнеровское поведение. Это также могут быть задачи по определению квантовых состояний легкого кварка, взаимодействующих с системой тяжелых кварков, задачи по определению резонансного захвата электронов группой атомов (квантовые точки и ямы) и т.п.

И, конечно, особую значимость эти задачи имеют для астрофизических приложений: оценка скорости реакций нового типа в нейтронных звездах и их резонансных излучений, или излучений от других сверхплотных объектов космоса.

Интерес здесь связан с тем, что параметры структурных резонансных состояний явно зависят от межъядерных расстояний. Например, с изменением этого расстояния возникающие резонансы могут стать очень узкими, а резонансные переходы и излучения очень интенсивными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Такибаев Н.Ж.* // ЯФ. 2008. Т. 71. С. 484.

2. *Такибаев Н.Ж.* // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2007. № 3. С. 70.

3. *Такибаев Н.Ж., Курмангалиева В.О., Такибаева М.Н.* // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2008. № 6. С. 27.

4. *Takibayev N.Zh.* // Cornell University Ed. USA. National Science Foundation. ArXiv: 1002.2257v1 [nucl-th], 11Feb 2010.

5. *Киржниц Д.А., Крючков Г.Ю., Такибаев Н.Ж.* // Элементарные частицы и атомное ядро. 1979. Т. 10. С. 289.

6. *Faddeev L.D.* Mathematical Aspects of the Three Body Problem in Quantum Scattering Theory. New York, 1965.

7. *Меркурьев С.П., Фаддеев Л.Д.* Квантовая механика трехчастичных систем. М.: Наука, 1987.

Резюме

Үш бөлшектің шашырауының кванттық есебін дәл шешу әдісі 4 бөлшек жүйесінде шашырау есебіне жалпыланады, оның біреуі жеңіл, ал қалған үшеуі өте ауыр. Үш бөлшек есебіндегідей шешім аналитикалық түрғыда анықталады және шашырау аумағында параметрлері (яғни, энергиясы мен ені) ауыр бөлшектердің ара қашықтығының функциясы болып табылатын жаңа резонанстар сериясы пайда болады. Осы жаңа резонанстардың пайда болуына міндетті эффектілер мен олардың практикада қолданудың мүмкіндіктері баяндалады.

Summary

The exact solution method of three particle scattering quantum problem has been generalized to the four particle scattering, when one of them is light and others are very heavy. Solutions have been determined also in analytical form as in the three particle problem, and demonstrate that in scattering region in the system new resonance series appear with parameters (i.e. resonance energies and widths) depending on distances between pair heavy centers. Effects resulting from new resonances and their interesting applications have been discussed.

КазНУ им. аль-Фараби,
г. Алматы

Поступила 10.03.2010г.