УДК 539.171

Н.Ж. ТАКИБАЕВ, В.О. КУРМАНГАЛИЕВА, М.Н. ТАКИБАЕВА

К ТЕОРИИ РЕЗОНАНСНОГО РАССЕЯНИЯ ЛЕГКОЙ ЧАСТИЦЫ НА ДВУЯДЕРНОЙ СИСТЕМЕ

Излагается теоретический подход описания резонансного рассеяния легкой частицы на системе двух тяжелых ядер. Подход основан на определении аналитических решений в классе точно решаемых модельных задач и последующей оценке поправок методом эволюции по параметру. Дается анализ полученных решений, и исследуются свойства новых трехчастичных резонансных состояний.

1. **Введение.** Известно, что решения задач в квантовой механике трех тел сопряжено с проведением достаточно сложных численных расчетов. При этом анализ характеристик системы таких, как появление квазистационарных состояний, их движение в комплексной плоскости энергий, зависимость от внешних воздействий и прочее, практически невозможен при отсутствии аналитических выражений. Даже при масштабных численных расчетах можно фиксировать лишь последовательные изменения полученных результатов, интерпретация которых не всегда позволяет выявить реально имеющиеся или возникающие зависимости в системе.

В настоящей работе предлагается решение указанной проблемы с помощью модельных задач, позволяющих найти точные решения в аналитической форме [1,2]. Хотя класс таких задач уже установлен, и некоторые свойства решений исследованы, но для полноты описания важно сформулировать последовательный теоретический подход, и определить возможности практических приложений. Данная работа и посвящена изучению этих вопросов.

Ниже указывается, каким образом и с помощью, каких теоретических приемов можно расширить рамки применимости модельных решений. Рассмотрены простые примеры трехтельных систем, имеющих практическую значимость и позволяющих определить в явной форме главные закономерности и зависимости, которые в принципе не могут иметь места в обычной задаче двух тел.

Приведены решения для энергий трехтельных резонансных уровней и показаны эффекты мультипликации и расщепления уровней, относительно исходных двухтельных уровней. Дан способ определения полных амплитуд рассеяния и волновых функций. Указаны методы определения поправок к главному решению и важные соотношения для оценок сходимости решений, полученных в рамках последовательных итераций.

Решение этих вопросов открывает широкие возможности использование предлагаемого подхода в практических приложениях.

2. Постановка задачи. Основой квантовомеханической теории взаимодействия трех тел является система уравнений Фаддеева, которая удовлетворяет требованиям существования и единственности решений [3,4]. В этом ее отличие от исходного уравнения Липпмана-Швингера, которое применительно к задаче рассеяния трех тел содержит неоднозначности по асимптотическим пределам. Это означает, что асимптотические решения на больших расстояниях будут разными для разных пар частиц.

Действительно, уравнение Липпмана-Швингера для T-матриц может быть записано для матриц перехода между парными каналами в виде:

$$\mathrm{T_{ij}}(\mathrm{Z}) = \mathrm{V_i}\delta_{\mathrm{ij}} + \mathrm{V_i G(Z) V_j}\ , \qquad (1)$$

где полная T-матрица равна: $\mathrm{T} = \sum_{\mathrm{i,j=1}}^{3} \mathrm{T_{ij}}$, $\mathrm{G(Z)}$ есть полная функция Грина. V_i ($\mathrm{i} = 1,2,3$) есть парные потенциалы взаимодействия, для которых парные t-матрицы определяются из уравнений: $t_i = V_i + V_i G_0 t_i$.

Отметим, что для краткости записи, взаимодействующую пару частиц и соответствующие этой паре операторы обычно помечают номером третьей частицы. Таких обозначений мы и будем ниже придерживаться.

Решение уравнения (1) оказывается некорректным, т.е. неоднозначным, из-за присутствия несвязных слагаемых в этом уравнении, или, другими словами, из-за наличия неинтегрируемых особенностей в свободном члене и в его ядре.

Неоднозначность в уравнениях Фаддеева устраняется тем, что вводятся канальные амплитуды – т.е. для каждого асимптотического перехода определяется своя амплитуда и для нее свое уравнение. Но уравнения для переходов будут связаны между собой, и они образуют систему уравнений [3,4]:

$$T_{ij}(Z) = t_i\delta_{ij} + \sum_{k=1}^{3} t_i G_0(Z)\bar{\delta}_{ik} T_{kj}. \qquad (2)$$

Ядра этих интегральных уравнений уже не воспроизводят при итерациях несвязные слагаемые и не ведут к появлению неинтегрируемых особенностей [4]. Обозначение $\bar{\delta}_{ik} = 1 - \delta_{ik}$ есть символ анти-Кронекера, т.е. $\bar{\delta}_{ik} = 0$, если $k = i$, и $\bar{\delta}_{ik} = 1$, если $k \neq i$. G_0 - свободная функция Грина, определенная в пространстве трех частиц.

Формально, у элемента трехчастичной T-матрицы T_{ij} индекс i отвечает номеру пары, выживающей последней на асимптотике слева, т.е. отвечает номеру частицы, покидающей первой область взаимодействия. Аналогично, индекс j отвечают номеру пары взаимодействующей последней на асимптотике справа.

Введем чисто «связные» амплитуды $W_{ij} = T_{ij} - t_i\delta_{ij}$, и получим для них систему интегральных уравнений:

$$W_{ij}(Z) = Q_{ij} + \sum_{k=1}^{3} t_i G_0(Z)\bar{\delta}_{ik} W_{kj}, \qquad (3)$$

имеющей, в отличие от (2), другие свободные члены, а именно: $Q_{ii}(Z) = 0$, и $Q_{ij}(Z) = t_i G_0(Z) t_j$ при $j \neq i$. Это обеспечивает компактность системы уравнений (3) и, соответственно, однозначное определение амплитуд T_{ij} и самой полной T-матрицы: $T = \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij}$. Интегралы в этих уравнениях представляют собой квадратично интегрируемые функции, в частности, от импульсных переменных [4]. Существование решений в уравнениях Фаддеева достигается тем, что ядра интегральных уравнений становятся связными величинами, нормы которых являются ограниченными.

В плане практических приложений, уравнения Фаддеева остаются трудно доступными для анализа. Их решения находятся лишь в численном виде, как результат громоздких и сложных расчетов. Исключение составляют только два особых примера, когда решения удается провести до конца.

Это возможно, например, в пределе больших отношений парных длин рассеяния к радиусам действия парных сил. И уже эти предельные решения показали, что задача трех тел является значительно более богатой по физическим эффектам по сравнению с обычной задачей двух тел [5,6].

Выше уже отмечалось, решения модельных задач могут быть получены в аналитической форме. Причем в этих решениях могут быть явно определены условия появления связанных, виртуальных и квазистационарных состояний [1,2].

В точно решаемых моделях используются два упрощающих момента – парные сепарабельные потенциалы, обрывающие ряд последовательных итераций в задаче двух тел, и предел $\zeta = m/M \to 0$, где m – масса легкого, а M – масса тяжелого тела, в котором происходит развязка кинематических переменных между разными парами частиц. В результате решения могут быть проведены до конца.

Найденные аналитические решения будут использоваться в ряде рассматриваемых здесь задач как главное решение, или как главное приближение, если необходимо оценить поправки к главному решению.

Рецепт определения поправок основан на использовании метода эволюции по константе связи. В общем случае его называют методом дифференцирования по параметру, по которому определяются сдвиги характеристик системы. В качестве такого параметра может быть взята, например, обратная масса тяжелой частицы или разность реального и модельного потенциалов и т.д. Поскольку оценка поправок будет носить итерационный характер, то сходимость в этом случае будет более быстрой - экспоненциальной, а не степенной как в обычной теории возмущений [3].

Однако, так же, как и в вариационных методах, важным при этом будет сходимость к точному решению, поскольку есть опасность «уйти в сторону» и оказаться вблизи локального ложного минимума. Гарантией сходимости найденного «поправленного» решения к реально существующему решению будет выполнение специальных соотношений или неравенств. Это должно обеспечить соответствие результата искомым физическим величинам.

3. Техника получения точных модельных решений. Допустим, что парные t-матрицы определяются до конца и могут быть записаны в аналитическом виде. Это может быть следствием сепарабельной формы парных потенциалов, когда $V_i = | v_i > \lambda_i < v_i |$, и тогда:

$$t_i = | v_i > \eta_i < v_i | , \tag{4}$$

где $\eta_i^{-1} = 1/\lambda_i - < v_i | G_0 | v_i >$. Величину η_i часто называют коэффициентом усиления.

Это может быть и в случае, если парная амплитуда имеет острый изолированный резонанс, и тогда вблизи резонанса t-матрица представима в форме Брейта-Вигнера:

$$t_i \approx -\frac{1}{\pi\rho(E)} \cdot \frac{\Gamma/2}{E - E_R + i\Gamma/2} . \tag{5}$$

Выберем далее систему единиц, где $\hbar = 1$ и $c = 1$. Энергия и ширина резонанса будут определяться реальной и мнимой частями волнового числа: $E_R = (p_R^2 - p_I^2)/2m$ и $\Gamma = 2p_R p_I / m$. Этот случай важен в практических приложениях, и мы рассмотрим его более подробно.

Форму (5) можно свести к виду (4), если определить форм-фактор так, что $v_i(\vec{p}) = < v_i | \vec{p} > = \sqrt{\Gamma / 2\pi\rho(E)}$ вблизи резонанса. Тогда коэффициент усиления будет равен: $\eta_i = -1/(E - E_R + i\Gamma/2)$.

Считая, как это часто принимается, что в достаточно широком интервале значений p величина Γ/p сохраняется почти неизменной, можно этот форм-фактор в S-волне вообще положить равной константе.

Конечно, можно выбрать для форм-факторов иные зависимости от импульсных переменных, и определить соответствующие вариации в решениях. Расчеты показывают, что вариации оказываются незначительными, особенно в резонансной области. Действительно, поскольку резонанс доминирует в рассматриваемой области энергий, и вклад нерезонансных слагаемых невелик, то основные особенности трехчастичных характеристик также мало меняются. При выборе вида форм-факторов важно, конечно, не войти в противоречие с общими условиями унитарности и причинности.

Заключая обсуждение характеристик резонансной парной t-матрицы, напомним, что энергия и ширина изолированного парного резонанса считаются заданными или, например, известными из опытных данных. Решения задачи трех тел в главном приближении тогда можно легко определить.

Исходя из вида парных t_i-матриц (4), запишем T_{ij}-матрицы Фаддеева в форме: $T_{ij} = t_i \cdot \delta_{ij} + | v_i > \eta_i \, P_{ij} \, \eta_j < v_j |$, и перейдем от (2) к системе уравнений для амплитуд P_{ij}:

$$P_{ij} = \Lambda_{ij} + \sum_l \Lambda_{il} \eta_l P_{lj} , \tag{6}$$

где $\Lambda_{ij} = < v_i | G_0(Z) | v_j >, \quad i \neq j$. Отметим, что матрица Λ_{ij} является недиагональной по индексам i и j, т.е. эта матрица является связной и не содержит особенностей типа δ-функций.

Положим далее, что одна из частиц легкая, а две другие тяжелые, и возьмем предел $\zeta = m/M > 0$, где m – масса легкой частицы, а M - масса тяжелых частиц. Определим параметры парных подсистем. Полная энергия системы будет равна: $Z = \sum_i p_{0i}^2 / m_i \to p_{01}^2 / m$, где $\vec{p}_{01} = \vec{p}_0$ - начальный импульс легкой частицы. Тяжелые частицы будут под номерами 2 и 3.

Поскольку $\vec{q}_{12} = (m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2)/(m_1 + m_2)$, то в этом пределе $\vec{q}_{12} \to \vec{p}_1 = \vec{p}$. И, аналогично, $\vec{q}_{13} \to \vec{p}_1 = \vec{p}$. Тогда парные форм-факторы взаимодействия между легкой и любой из тяжелых частиц примут вид: $< v(\vec{q}_{12}) | \to < v(\vec{p}) |$, $< v(\vec{q}_{13}) | \to < v(\vec{p}) |$.

Коэффициенты усиления η_2 и η_3 будут в этом пределе зависеть только от начальной энергии легкой частицы, т.к. $\eta_2 = \eta_3 \to \eta(p_0)$.

Парное взаимодействие между самими тяжелыми частицами можно на этом этапе вообще исключить, тогда индексы матриц в (6) будут пробегать только значения $i, j, l = 2,3$.

Учет взаимодействия в паре тяжелых частиц достаточно прост [1]. Он сведется к решению нескольких дополнительных уравнений, в которых найденные амплитуды из (6) будут выступать как эффективные потенциалы.

Например, для упругого рассеяния легкой частицы на паре тяжелых частиц, если их парный потенциал также является сепарабельным, эффективный потенциал в трехчастичном канале будет равен:

$$V_{11}^{ef} = \sum_{k,k'} < \nu_1 | G_0 | \nu_k > (\delta_{kk'} + \\ + \eta_k P_{kk'}) \eta_{k'} < \nu_{k'} | G_0 | \nu_1 >, \tag{7}$$

где $k, k' = 2,3$ и $k, k' \neq 1$. Тогда сама упругая амплитуда будет решением уравнения:

$$P_{11} = V_{11}^{ef} + \sum_{1_s} V_{11_s}^{ef} \eta_{1_s} P_{1_s 1}, \tag{8}$$

где суммирование идет по промежуточным состояниям того же канала номера 1.

Возвращаясь к записи, когда $i, j = 2,3$ (т.е. взаимодействие тяжелых частиц пока не учитывается или, вообще, выключено), выразим Λ_{ij} через форм-факторы парных взаимодействий:

$$\Lambda_{ij} = 2m \frac{\nu_i(\vec{p}) \cdot \nu_j(\vec{p})}{(p_0^2 - p^2 + i\gamma)} = f(\vec{p}) \quad , \ j \neq i, \tag{9}$$

причем здесь $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}'_3 = 0$, и $\vec{p}_1 = \vec{p}$.

Определим Фурье-преобразования выражения (9) и амплитуды P_{ij}:

$$J(r; p_0) = \int d\vec{p} \exp(i\vec{r}\vec{p}) f(\vec{p}) , \tag{10}$$

$$M(\vec{r}_2, \vec{r}'_3) = \\ = \iint d\vec{p}_2 d\vec{p}'_3 \exp(-i\vec{r}_2\vec{p}_2) P_{ij}(\vec{p}_2, \vec{p}'_3) \exp(i\vec{r}'_3 \vec{p}'_3) . \tag{11}$$

Далее, полагая $\vec{r}_2 = \vec{r}$ и $\vec{r}_3' = \vec{r}'$, получим Фурье-образ уравнения (6) [1]:

$$M(\vec{r}, \vec{r}') = J(r; p_0)\delta(\vec{r} + \vec{r}') + \\ + J(r; p_0)\eta(p_0) M(-\vec{r}, \vec{r}') . \tag{12}$$

Отметим, что в (12) во втором слагаемом справа учтено, что δ-функция $\delta(\vec{r} - \vec{r}_S)$ уже сняла операцию интегрирования по $\vec{r}_S$ - радиус-вектору промежуточного состояния. Поэтому решение получается в простой алгебраической форме. Действительно, однократная итерация в (12) ведет к линейному уравнению и его решению в виде:

$$M(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{K^0(\vec{r}, \vec{r}')}{1 - K(r)\eta(p_0)} . \tag{13}$$

где

$$K^0(\vec{r}, \vec{r}') = J(r; p_0)\delta(\vec{r} + \vec{r}') + \\ + J(r; p_0)\eta(p_0) J(-r; p_0)\, \delta(-\vec{r} + \vec{r}') , \tag{14}$$

и

$$K(\vec{r}) = J(r; p_0)\eta(p_0) J(-r; p_0) . \tag{15}$$

Удобно представить, следуя структуре (14), решение (13) в форме:

$$M(\vec{r}, \vec{r}') = M^+(\vec{r})\delta(\vec{r} + \vec{r}') + M^-(\vec{r})\, \delta(-\vec{r} + \vec{r}') . \tag{16}$$

Тогда первое слагаемое из (14) даст решение

$$M^+(\vec{r}) = \frac{1}{D(\vec{r}; p_0)} J(\vec{r}; p_0) , \tag{17}$$

а второе слагаемое - инверсное к нему решение

$$M^-(\vec{r}) = \frac{1}{D(\vec{r}; p_0)} J(\vec{r}; p_0) \eta J(-\vec{r}; p_0) . \tag{18}$$

Важно отметить, что матрица D по индексам пар частиц является диагональной. Ее элементы равны $D_{ij}(\vec{r}; p_0) = 0$, если $j \neq i$, и $D_{ii} = 1 - J_{ik}(\vec{r})\eta_k J_{ki}(-\vec{r})\eta_i$, если $j = i$. Это является следствием того, что $J_{ii} = 0$, а $J_{ij} \neq 0$, т.е. матрица J - наоборот, по этим индексам является недиагональной.

4. Резонансные состояния трехчастичного типа. Ясно, что амплитуды в (17) и (18) имеют полюсные особенности при одних и тех же значениях r и p_0, когда детерминант матрицы D обращается в нуль.

Зависимость D от $E_0 = p_0^2 / 2m$, начальной энергии легкой частицы, содержится в явной форме в коэффициентах усиления $\eta_i(p_0)$ и функциях $J_{ij}(\vec{r}, p_0)$. Эта же функция имеет зависимость и от вектора $\vec{r}$.

Вектор $\vec{r}$ должен быть приравнен радиус-вектору одной или другой тяжелой частицы в их системе центра инерции, как это следует из (11) и (16). Причем к радиус-вектору самой легкой частицы вектор $\vec{r}$ никакого отношения не имеет.

Формально это есть следствие того, что эффекты многократного взаимодействия легкой частицы в системе тяжелых частиц уже просуммированы, и в решениях (12) – (18) их нет. Они присутствуют в неявной форме в эффективных потенциальных функциях J_{ij}.

Интересно также, что собственно межъядерное расстояние (т.е. разность радиус-векторов двух тяжелых центров) в полученные решения явно не входит.

Рассмотрим случай изолированного резонанса в S-волне в парном взаимодействии легкой частицы с любой из тяжелых. Будем считать, что форм-фактор такого взаимодействия величина постоянная. Тяжелые частицы будем полагать тождественными. Функция J_{ij} будет тогда равна

$$J_{ij} = J_{ji} = J(r) = -\frac{\Gamma}{2}\cdot\frac{\exp(ip_0 r)}{p_R r} \quad . \qquad (19)$$

Нули детерминанта матрицы D будут определяться из простых соотношений:

$$\left(E - E_R + i\frac{\Gamma}{2} - J(r)\right)\cdot\left(E - E_R + i\frac{\Gamma}{2} + J(r)\right) = 0 \quad . \qquad (20)$$

Выражение (20) демонстрирует появление двух семейств трехчастичных уровней вокруг положения парного резонансного уровня.

Одни из уровней в каждом семействе располагаются по энергии ниже парного резонанса, а другие – выше. Положения уровней семейств находятся из соотношений:

$$E_\Lambda^- = E_R - \frac{\Gamma}{2}\cdot\frac{\cos(p_0 r)}{p_R r} \quad \text{и}$$

$$E_\Lambda^+ = E_R + \frac{\Gamma}{2}\cdot\frac{\cos(p_0 r)}{p_R r} \quad . \qquad (21)$$

Индекс Λ отмечает номер трехчастичного уровня. Для ширин этих уровней соотношения принимают вид:

$$\Gamma_\Lambda^- = \Gamma\cdot\left(1 + \frac{\sin(p_0 r)}{p_R r}\right) \quad \text{и}$$

$$\Gamma_\Lambda^+ = \Gamma\cdot\left(1 - \frac{\sin(p_0 r)}{p_R r}\right) \quad . \qquad (22)$$

Видно, что сдвиги положений трехтельных резонансов и их ширин могут быть разных знаков в зависимости от значения $p_0 r$ - аргумента тригонометрических функций в (21) и (22).

Особый интерес в практическом плане имеют значения r, сравнимые по величине с межатомными расстояниями в кристаллической решетке. По ядерным масштабам такие расстояния чрезвычайно велики, но могут быть достигнуты, если парные резонансы расположены в области сверхнизких энергий. При этом возникает возможность влиять на положение и ширину резонансов путем небольшого изменения постоянной решетки, т.е. параметра r. Указанные изменения в монокристалле могут быть осуществлены воздействием внешних полей, или механическими деформациями.

5. Резонансные состояния при сверхнизких энергиях. Рассмотрим случай близкого к нулю связанного или виртуального состояния в двухтельной системе, состоящего из нейтрона и тяжелого ядра. Такое имеет место в реальных процессах рассеяния [7,8].

Для указанных резонансных явлений главное приближение для парной t-матрицы имеет совсем простой вид: $t_i \approx \mathrm{Const}\cdot(\kappa + i\cdot p_0)^{-1}$, где $\mathrm{Const} = 4\pi/2m$, и тогда длина рассеяния равна κ^{-1}. Величина κ положительна для связанного состояния, и отрицательна для виртуальных уровней. Длина рассеяния может быть достаточно большой по величине и сравнимой с межъядерными расстояниями в молекулах или кристалле. Примеры, имеющие определенный практический интерес, будут рассмотрены в отдельной работе (см. также [7,8]). Здесь мы изложим метод теоретического описания.

В рамках точных модельных решений (17) – (22) отличие будет состоять в выражении для потенциальной функции $J(r)$, которая здесь равна:

$$J(r) = -\frac{\exp(ip_0 r)}{r\cdot(\kappa + ip_0)} \quad , \qquad (23)$$

и тогда общее выражение, обобщающее (21) и (22), можно записать в виде:

$$E_{\Lambda}^{\pm} - i\frac{\Gamma_{\Lambda}^{\pm}}{2} = E_{\kappa} \cdot [1 \pm \frac{\exp(ip_0 r)}{\kappa \cdot r} \cdot (1 - i\frac{p_0}{\kappa})], \quad (24)$$

где $E_{\kappa} = -\kappa^2 / 2m$.

Нетрудно увидеть, что трехчастичные уровни могут располагаться, как в области отрицательных энергий (дискретный спектр), так и в области континуума (непрерывный спектр). Они имеют явную зависимость от переменной r и, таким образом, с ее изменением могут менять свои характеристики.

Аналогичным образом могут быть описаны и более сложные случаи, когда парные подсистемы имеют несколько резонансных состояний или несколько уровней дискретного спектра.

6. Решения для амплитуд и волновых функций. Для полного решения модельной задачи остается определить амплитуды и волновые функции. Полагая $k, k' = 2,3$ и используя решения $P_{kk'}$ из (11) и (6), запишем амплитуды W_{11} и W_{k1} в форме:

$$W_{11} = \sum_{k=2,3} t_1 G_0(Z) W_{k1} =$$

$$= \sum_{k=2,3} t_1 G_0(Z) | \nu_k > \eta_k [\rho_{k1} + F_{k1}] \quad , \quad (25)$$

$$W_{k1} = | \nu_k > \eta_k [\rho_{k1} + F_{k1}] \quad , \quad (26)$$

где

$$F_{k1} = \sum_{k' \neq k} < \nu_k | G_0(Z) W_{k'1} = \sum_{k'=2,3} P_{kk'} \eta_{k'} \rho_{k'1} \quad ,(27)$$

а

$$\rho_{k1} = < \nu_k | G_0(Z) [t_1 + W_{11}] \quad . \quad (28)$$

Тогда уравнение для рассеяния легкой частицы с учетом взаимодействия в паре тяжелых частиц примет вид ($W_{11} = V_1 \cdot \widetilde{W}_{11}$):

$$\widetilde{W}_{11} = V_{11}^{ef} + V_{11}^{ef} G_1^{-1} G_0 \widetilde{W}_{11} \quad , \quad (29)$$

где эффективный потенциал канала 1 равен:

$$V_{11}^{ef} = G_1 | \nu_k > \eta_k [\delta_{kk'} + P_{kk'} \eta_{k'}] < \nu_{k'} | G_0 t_1 . \quad (30)$$

В (30) предполагается, что потенциал V_1 может быть произвольного вида, т.е. не обязательно сепарабельного. Если же V_1 сепарабельный потенциал, то уравнение (29) упрощается и сводится к уравнению (8) для амплитуды P_{11}, а выражение (30) к соответствующему выражению (7).

Решения для волновых функций находятся еще проще. Так, T-матрицы, взятые в обкладках начальных и конечных состояний есть искомые амплитудами, и, например, в случае плоских волн имеет место простая связь: $\sum_{j=1,2,3} T_{ij} | \chi >= V_i | \Psi >$. Отсюда следует

$$< \Psi | = \sum_{j=1}^{3} < \chi | T_{ji} V_i^{-1} = \varphi_i + \sum_{j=1}^{3} < \chi | \widetilde{W}_{ji} \quad , \quad (31)$$

где φ_i - парная волновая функция, отвечающая нужной асимптотике в конечном состоянии, а матрица $\widetilde{W}_{ji} \cdot V_i = W_{ji}$ записывается с выделенным парным потенциалом и обобщает ранее введенное обозначение в (29).

Итак, решения уравнения (29) будут определять амплитуды (25) и (26), и волновые функции (31), которые можно затем использовать для определения поправок к главному решению и оценки сходимости в процедуре последовательных итераций.

7. Определение малых поправок. Поправки к главному приближению, т.е. к точным модельным решениям, могут быть нескольких видов. В основном это поправки, возникающие за счет конечных масс тяжелых частиц, и поправки, связанные с уточнением парных потенциальных сил.

Для определения поправок первого типа достаточно использовать систему уравнений (3). Будем считать, что параметр $\zeta = m / M << 1$. Запишем $W_{ij}(Z) = \sum W_{ij}^{(n)}$, где $W_{ij}^{(0)}$ есть модельное решение, которое выше нами определено точно. Поправочные члены $W_{ij}^{(n)}$ при $n \geq 1$ могут быть найдены из самих уравнений (3) методом последовательных итераций.

Так поправка первого порядка будет определяться соотношением:

$$W_{ij}^{(1)}(Z) = \Delta Q_{ij} + \sum_{k=1}^{3} \Delta [t_i G_0(Z)] \overline{\delta}_{ik} W_{kj}^{(0)} \quad . \quad (32)$$

А для $n > 1$ соотношениями:

$$W_{ij}^{(n)}(Z) = \sum_{k=1}^{3} t_i G_0(Z) \overline{\delta}_{ik} W_{kj}^{(n-1)} \quad . \quad (33)$$

Здесь ΔQ и $\Delta [t_i G_0(Z)]$ есть разности между заданными значениями операторов и их предельными формами при $\zeta \to 0$.

Поправки, связанные с уточнением парных потенциалов или, например, с включением трехтельных сил или слабых внешних полей, могут быть найдены методом дифференцирования по константе связи. Соответствующая константа связи может быть введена как формальный безразмерный параметр, например, в виде $\Delta V = g \cdot \phi$, где потенциал ϕ от константы связи не зависит. Константа связи меняется от $g = 0$ до $g = 1$, когда поправочный потенциал включен полностью.

Изменения, касающиеся энергий связанных состояний, волновых функций и амплитуд рассеяния, находятся тогда из уравнений [9]:

$$\frac{dE_B}{dg} = < \Psi_B \mid \phi \mid \Psi_B > \quad , \tag{34}$$

$$\frac{d \mid \Psi_n >}{dg} = G(Z)\phi \mid \Psi_n > \quad , \tag{35}$$

$$\frac{df_{mn}}{dg} = \sum_s \; < \Psi_m \mid \phi \mid \Psi_s > \cdot f_{sn} \delta(E_m - E_s) \quad ,(36)$$

где в качестве граничного значения (при $g = 0$) берутся решения, полученные в отсутствие поправочных потенциалов.

Предполагается, что поправки малы и решения уравнений (34) - (36) можно искать также методом последовательных итераций.

Эти же соотношения, т.е. (34) – (36), можно использовать в качестве оценочных с тем, чтобы удостоверится в сходимости итерационных процедур. Полагая, например, параметр $g = \zeta$, можно оценить поправки, связанные с конечностью массы тяжелых частиц. Если итерации в (32) и (33) дают удовлетворительное согласие с оценками из (34) – (36), то это указывает на сходимость решений. В противном случае следует исправить итерационную процедуру в (32) и (33), например, путем предварительного суммирования подгруппы или последовательности расходящихся диаграмм.

Заключение. В настоящей работе было продолжено развитие теоретического подхода, основанного на определении и использовании решений модельных трехтельных задач, имеющих аналитическую форму записи. Учет поправок к модельным решениям позволяет расширить приложения подхода и дать описание некоторых интересных физических процессов и явлений в трехтельных системах.

К таким процессам относятся задачи резонансного рассеяния в трехтельных системах, в которых одно из тел является легким, а два других очень тяжелыми по массе. Естественно, предполагается, что это область нерелятивистских энергий, где такая особенность представляется существенной.

Перечислим некоторые из физических задач, которые, несомненно, могут представить интерес, как в практическом, так и в теоретическом плане. Это задача рассеяния нейтронов на двух тяжелых ядрах при низких энергиях, задача определения электронных состояний молекулярного иона водорода и аналогичных молекулярных структур, задача определения квантовых состояний легкого кварка, взаимодействующего с двумя тяжелыми кварками, и т.п.

Особую значимость приобретают трехчастичные реакции при астрофизических энергиях, например, в сверхплотных средах при образовании нейтронных звезд или других экзотических объектов.

Интерес здесь может быть связан с тем, что параметры трехчастичных состояний явно зависят от межъядерного расстояния. Например, с изменением этого расстояния возникающие резонансы могут стать очень узкими, а резонансные переходы более интенсивными.

Некоторые из возможных практических приложений были приведены в работах [1,8]. Можно к этому добавить, например, создание нейтронных накопителей и зеркал, работа которых может быть основана на резонансных трехчастичных эффектах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Такибаев Н.Ж.* // ЯФ. 2008. Т. 71. С. 484.

2. *Такибаев Н.Ж.* // Известия НАН РК. серия физ.-мат. 2007. № 3. С. 70.

3. *Faddeev L.D.* Mathematical Aspects of the Three Body Problem in Quantum Scattering Theory. New York, 1965 г.

4. *Меркурьев С.П., Фаддеев Л.Д.* Квантовая механика трехчастичных систем. М., Наука, 1987 г.

5. *Беляев В.Б.* Лекции по теории малочастичных систем. М., 1986 г.

6. *Baz' A.I., Zel'dovich Ya.B., Perelomov A.M.* Scattering, reactions, and decays in nonrelativistic quantum mechanics. Jerusalem, 1966 г.

7. *Такибаев Н.Ж., Курмангалиева В.О., Жумабекова В.Н.* Математическое моделирование и информационные технологии в образовании и науке. Алматы. 2008. Т. 1. С. 148.

8. *Такибаев Н.Ж., Курмангалиева В.О., Жумабекова В.Н.* // Вестник КазНУ. 2008. серия физ. № 3.

9. *Киржниц Д.А., Крючков Г.Ю., Такибаев Н.Ж.* // ЭЧАЯ. 1979. Т. 10, С. 289.

Резюме

Екі ауыр ядро жүйесіндегі жеңіл бөлшектердің резонансты таралуын сипаттайтын теориялық амал баяндалады. Бұл амал нақты шешілетін моделді есептер класында және параметр бойынша эволюция әдісімен түзетулерді бағалауда сараптамалық шешімдерді анықтауға негізделген. Алынған шешімдердің талдауы жасалып, жаңа үшбөлшекті резонансты күйлердің қасиеттері зерттеледі.

Summary

The theoretical approach to the description of resonant scattering of the light particle on two nuclei system has been given. The approach is based on determination of analytical solutions in class of exact solvable model problems, and further estimation of corrections with the evolution parameter method. The obtained solutions have been analyzed, and the properties of new three particle resonant states have been investigated.

Алматы, Казахский национальный педагогический университет им. Абая

Поступила 12.11.08