

УДК 519.62

С. М. ТЕМЕШЕВА

## ОБ ОДНОМ ПРИЗНАКЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ИЗОЛИРОВАННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Установлены необходимые и достаточные условия существования изолированного решения нелинейной двухточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим нелинейную двухточечную краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \in [0, T], \quad x \in R^n, \quad (1)$$

$$g(x(0), x(T)) = 0, \quad (2)$$

где  $f : [0, T] \times R^n \rightarrow R^n$ ,  $g : R^n \times R^n \rightarrow R^n$  непрерывны.

Через  $C([0, T], R^n)$  обозначим пространство непрерывных функций  $x : [0, T] \rightarrow R^n$  с нормой  $\|x\|_1 = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\|$ .

Решением задачи (1), (2) является непрерывно дифференцируемая на  $[0, T]$  вектор-функция  $x^*(t) \in C([0, T], R^n)$ , удовлетворяющая на  $[0, T]$  дифференциальному уравнению (1) (при этом в точках  $t = 0, t = T$  уравнению (1) удовлетворяют односторонние производные  $\dot{x}_{\text{прав.}}^*(0), \dot{x}_{\text{лев.}}^*(T)$ ) и имеющая в точках  $t = 0, t = T$  значения  $x^*(0), x^*(T)$ , для которых справедливо равенство (2).

Задача (1), (2) исследуется методом параметризации [1]. Выберем шаг  $h > 0 : Nh = T$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) и разобьем промежуток  $[0, T] : [0, T] = \bigcup_{r=1}^N [(r-1)h, rh]$ . Сужение функции  $x(t)$  на  $r$ -ый интервал  $[(r-1)h, rh]$  обозначим через  $x_r(t)$ ,  $r = 1 : N$ .

Через  $C([0, T], h, R^{nN})$  обозначим банахово пространство систем функций  $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$  с нормой  $\|x[\cdot]\|_2 = \max_{r=1:N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|x_r(t)\|$ , где  $x_r : [(r-1)h, rh] \rightarrow R^n$  непрерывна и имеет конечный предел при  $t \rightarrow rh - 0$ ,  $r = 1 : N$ .

Обозначим через  $\lambda_r$  значения функции  $x_r(t)$  в точке  $t = (r-1)h$ :  $\hat{\lambda}_r = x_r((r-1)h)$ ,  $r = 1 : N$ . На каждом интервале  $[(r-1)h, rh]$ ,  $r = 1 : N$ , произведем замену  $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$  и от задачи (1), (2) перейдем к эквивалентной краевой задаче с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, \lambda_r + u_r), \quad t \in [(r-1)h, rh], \quad u_r((r-1)h) = 0, \quad r = 1 : N, \quad (3)$$

$$g(\lambda_1, \lambda_N + \lim_{t \rightarrow rh-0} u_N(t)) = 0, \quad (4)$$

$$\lambda_s + \lim_{t \rightarrow sh-0} u_s(t) - \lambda_{s+1} = 0, \quad s = 1 : (N-1). \quad (5)$$

Решением задачи (3)-(5) является пара  $(\lambda^*, u^*[t])$  с компонентами  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*) \in R^{nN}$ ,  $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_N^*(t)) \in C([0, T], h, R^{nN})$ , где непрерывно дифференцируемая и ограниченная на  $[(r-1)h, rh]$  функция  $u_r^*(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (3) при всех  $t \in [(r-1)h, rh]$  (при  $t = (r-1)h$  уравнению (3) удовлетворяет правосторонняя производная функции  $u_r^*(t)$ ),  $r = 1 : N$ , выполняется условие  $u_r^*((r-1)h) = 0$ ,  $r = 1 : N$ , и для  $\lambda_1^*, \lambda_N^* + \lim_{t \rightarrow Nh-0} u_N^*(t)$ ,  $\lambda_s^* + \lim_{t \rightarrow sh-0} u_s^*(t)$ ,  $\lambda_{s+1}^*$ ,  $s = 1 : (N-1)$ , имеют место равенства (4), (5).

Если  $(\lambda^*, u^*[t])$  – решение задачи (3)-(5), то функция  $x^*(t)$ , определенная равенствами:  $x^*(t) = \lambda_r^* + u_r^*(t)$ ,  $t \in [(r-1)h, rh]$ ,  $r = 1 : N$ ,  $x^*(T) = \lambda_N^* + \lim_{t \rightarrow Nh-0} u_N^*(t)$ , будет решением задачи (1), (2). И, обратно, если  $\tilde{x}(t)$  – решение задачи (1), (2), то пара  $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$  с компонентами  $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_N) \in R^{nN}$ ,  $\tilde{u}[t] = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \dots, \tilde{u}_N(t)) \in C([0, T], h, R^{nN})$ , где  $\tilde{\lambda}_r = \tilde{x}((r-1)h)$ ,  $\tilde{u}_r(t) = \tilde{x}(t) - \tilde{x}((r-1)h)$ ,  $t \in [(r-1)h, rh]$ ,  $r = 1 : N$ , будет решением задачи (3)-(5).

При фиксированном значении параметра  $\lambda_r$  задача Коши (3) эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$u_r(t) = \int_{(r-1)h}^t f(\tau, \lambda_r + u_r(\tau)) d\tau, \\ t \in [(r-1)h, rh], \quad r = 1 : N. \quad (6)$$

Подставляя вместо  $u_r(\tau)$  правую часть равенства (6) и повторяя этот процесс  $\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) раз, получим представление функции  $u_r(t)$ ,  $t \in [(r-1)h, rh]$ ,  $r = 1 : N$ , откуда определим

$$\lim_{t \rightarrow nh-0} u_r(t) = \int_{(r-1)h}^{rh} f\left(\tau_1, \lambda_r + \dots + \int_{(r-1)h}^{\tau_{r-1}} f(\tau_v, \lambda_r + u_r(\tau)) d\tau_v \dots\right) d\tau_1, \quad r = 1 : N.$$

Подставив найденные пределы в (4), (5), предварительно умножив (4) на  $h > 0$ , получим систему нелинейных уравнений относительно  $\lambda_r \in R^n$ :

$$\lambda \cdot g\left(\lambda_1, \lambda_N + \int_{(N-1)h}^{rh} f\left(\tau_1, \lambda_N + \dots + \int_{(N-1)h}^{\tau_{r-1}} f(\tau_v, \lambda_N + u_N(\tau)) d\tau_v \dots\right) d\tau_1\right) = 0, \\ \lambda_s + \int_{(s-1)h}^h f\left(\tau_1, \lambda_r + \dots + \int_{(s-1)h}^{\tau_{r-1}} f(\tau_v, \lambda_s + u_s(\tau)) d\tau_v \dots\right) d\tau_1 - \lambda_{s+1} = 0, \quad s = 1 : (N-1),$$

которую запишем в виде:

$$Q_{v,h}(\lambda, u) = 0, \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in R^{nN}.$$

**Условие А.** Существуют  $h > 0 : Nh = T$  ( $N = 1, 2, \dots$ ),  $v$  ( $v = 1, 2, \dots$ ) такие, что система нелинейных уравнений  $Q_{v,h}(\lambda, 0) = 0$  имеет решение  $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}) \in R^{nN}$ , и система функций  $u^{(0)}[t] = (u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t), \dots, u_N^{(0)}(t))$  с компонентами  $u_r(t) = \int_{(r-1)h}^t f\left(\tau_1, \lambda_r^{(0)} + \dots + \int_{(r-1)h}^{\tau_{r-1}} f(\tau_v, \lambda_r^{(0)}) d\tau_v \dots\right) d\tau_1$ ,  $t \in [(r-1)h, rh]$ ,  $r = 1 : N$ , принадлежит пространству  $C([0, T], h, R^{nN})$ .

По паре  $(\lambda^{(0)}, u^{(0)}[t])$  равенствами  $x^{(0)}(t) = \lambda_r^{(0)} + u_r^{(0)}(t)$ ,  $t \in [(r-1)h, rh]$ ,  $r = 1 : N$ ,  $x^{(0)}(T) = \lambda_N^{(0)} + \lim_{t \rightarrow Nh-0} u_N^{(0)}(t)$ , определим на отрезке  $[0, T]$  кусочно-непрерывную функцию  $x^{(0)}(t)$ .

Выберем числа  $\rho_\lambda > 0$ ,  $\rho_u > 0$ ,  $\rho_x > 0$  и составим множества

$$S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in R^{nN} : \|\lambda - \lambda^{(0)}\| = \max_{r=1:N} \|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\| < \rho_\lambda \right\},$$

$$S_u(u^{(0)}[t], \rho_u) = \left\{ u[t] \in C([0, T], h, R^{nN}) : \|u[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_2 < \rho_u \right\},$$

$$S(x^{(0)}(t), \rho_x) = \left\{ x(t) \in C([0, T], R^n) : \max_{t \in [0, T]} \|x(t) - x^{(0)}(t)\| < \rho_x \right\},$$

$$G_1^0(\rho_x) = \left\{ (t, x) : t \in [0, T], \|x - x^{(0)}(t)\| < \rho_x \right\},$$

$$G_1^0(\rho_\lambda, \rho_x) = \left\{ (v, w) \in R^{2n} : \|v - \lambda_1^{(0)}\| < \rho_\lambda, \|w - x^{(0)}(T)\| < \rho_x \right\}.$$

**Условие В.** Функции  $f(t, x)$ ,  $g(v, w)$  соответственно в  $G_1^0(\rho_x)$ ,  $G_2^0(\rho_\lambda, \rho_x)$  непрерывны, имеют равномерно непрерывные частные производные  $f'_x(t, x)$ ,  $g'_v(v, w)$ ,  $g'_w(v, w)$  и выполняются неравенства  $\|f'_x(t, x)\| \leq L_0$ ,  $\|g'_v(v, w)\| \leq L_1$ ,  $\|g'_w(v, w)\| \leq L_2$ , где  $L_0$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  – постоянные.

Предположим, что имеет место условие А. Тогда за начальное приближение решения задачи (3)–(5) возьмем пару  $(\lambda^{(0)}, u^{(0)}[t])$  и найдем последовательность  $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , по следующему алгоритму:

Шаг 1. а) Решая систему нелинейных уравнений  $\mathcal{Q}_{v,h}(\lambda, u^{(0)}) = 0$  найдем  $\lambda^{(1)} \in R^{nN}$ ; б) вычислим компоненты системы функций  $u^{(1)}[t]$  по формуле

$$u_r^{(1)}(t) = \int_{(r-1)h}^t f\left(\tau_1, \lambda_r^{(1)} + \dots + \int_{(r-1)h}^{\tau_{r-1}} f\left(\tau_v, \lambda_r^{(1)} + u_r^{(0)}(\tau_v)\right) d\tau_v, \dots\right) d\tau_1, \quad t \in [(r-1)h, rh], \quad r = 1 : N.$$

Шаг 2. а) Решая систему нелинейных уравнений  $\mathcal{Q}_{v,h}(\lambda, u^{(1)}) = 0$  найдем  $\lambda^{(2)} \in R^{nN}$ ; б) вычислим компоненты системы функций  $u^{(2)}[t]$  по формуле

$$u_r^{(2)}(t) = \int_{(r-1)h}^t f\left(\tau_1, \lambda_r^{(2)} + \dots + \int_{(r-1)h}^{\tau_{r-1}} f\left(\tau_v, \lambda_r^{(2)} + u_r^{(1)}(\tau_v)\right) d\tau_v, \dots\right) d\tau_1, \quad t \in [(r-1)h, rh], \quad r = 1 : N.$$

Достаточные условия осуществимости, сходимости предложенного алгоритма, которые одновременно обеспечивают существование изолированного решения многоточечной краевой задачи с параметрами (3)–(5) устанавливают

**Теорема 1** [2, с. 86]. Пусть существуют  $h > 0 : Nh = T$  ( $N = 1, 2, \dots$ ),  $v$  ( $v = 1, 2, \dots$ ),  $\rho_\lambda > 0$ ,  $\rho_u > 0$ ,  $\rho_x > 0$ , при которых выполняются условия А, В, матрица Якоби  $\partial \mathcal{Q}_{v,h}(\lambda, u) / \partial \lambda$  обратима для всех  $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S_u(u^{(0)}[t], \rho_u)$  и имеют место неравенства:

$$1) \left\| \frac{\partial \mathcal{Q}_{v,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda} \right\|^{-1} \leq \gamma_v(h), \quad 2) q_v(h) = \frac{(hL_0)^v}{v!} \left( 1 + \gamma_v(h) \max(1, hL_2) \sum_{i=1}^v \frac{(hL_0)^i}{i!} \right) < 1,$$

$$3) \gamma_v(h) \left\| \mathcal{Q}_{v,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)}) \right\| + \frac{q_v(h)}{1 - q_v(h)} \gamma_v(h) \max(1, hL_2) \frac{(hL_0)^v}{v!} \|u^{(0)}[\cdot]\|_2 < \rho_\lambda.$$

$$4) \frac{q_v(h)}{1-q_v(h)} \|u^{(0)}[\cdot]\|_2 < \rho_u, \quad 5) \rho_\lambda \sum_{i=0}^{v-1} \frac{(hL_0)^i}{i!} + \rho_v \max_{i=0(v-1)} \left\{ \frac{(hL_0)^i}{i!} \right\} + b_v < \rho_x,$$

где  $b_1 = 0$ ,  $b_v = \max_{r=1:N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \int_{(r-1)h}^t f(\tau, \lambda_r^{(0)}) d\tau \right\| \sum_{i=v}^{2(v-1)} \frac{(hL_0)^i}{i!}$ ,  $v \geq 2$ .

Тогда задача (1), (2) в  $S(x^{(0)}(t), \rho_x)$  имеет изолированное решение.

В нелинейных краевых задачах изолированность решения играет такую же важную роль как единственность решения в линейных задачах. В теореме 1 изолированное решение понимается как изолированный элемент множества решений. Известно, что такое решение не только не обеспечивает его непрерывную зависимость от исходных данных, но и не сохраняет свойство разрешимости при малых изменениях правой части дифференциального уравнения. Так, например, периодическая краевая задача  $\dot{x} = x^2$ ,  $t \in [0,1]$ ,  $x(0) = x(1)$ , имеет изолированное решение  $x = 0$ , однако, задача  $\dot{x} = x^2 + \varepsilon$ ,  $t \in [0,1]$ ,  $x(0) = x(1)$ , не имеет решения при любом  $\varepsilon > 0$ .

Учитывая, что построение приближенных методов предполагает непрерывную зависимость решения от изменений правой части дифференциального уравнения и граничных условий, в [1, с. 57] введено следующее

**Определение.** Функция  $x^*(t)$  называется "изолированным" решением задачи (1), (2), если существует число  $\rho_0 > 0$  такое, что функции  $f(t, x)$  и  $g(v, w)$  соответственно в  $G_1^*(\rho_0) = \{(t, x) : t \in [0, T], \|x - x^*(t)\| < \rho_0\}$ ,  $G_2^*(\rho_0, \rho_0) = \{(v, w) \in R^{2n} : \|v - x^*(0)\| < \rho_0, \|w - x^*(T)\| < \rho_0\}$  имеют равномерно непрерывные частные производные  $f'_x(t, x)$ ,  $g'_v(v, w)$ ,  $g'_w(v, w)$  и линейная однородная двухточечная краевая задача

$$\dot{y} = f'_x(t, x^*(t))y, \quad t \in [0, T], \quad y \in R^n, \quad g'_v(x^*(0), x^*(T))y(0) + g'_w(x^*(0), x^*(T))y(T) = 0,$$

имеет только тривиальное решение.

Следующее утверждение показывает, что условия теоремы 1 не только достаточны, но и необходимы для существования "изолированного" решения задачи (1), (2).

**Теорема 2.** Если задача (1), (2) в  $S(x^{(0)}(t), \rho_x)$  имеет "изолированное" решение, то для любого  $v$  ( $v = 1, 2, \dots$ ) найдутся  $h = h(v) : Nh = T$  ( $N = 1, 2, \dots$ ),  $\rho_\lambda > 0$ ,  $\rho_u > 0$ ,  $\rho_x > 0$ , при которых выполняются условия A, B, матрица Якоби  $\partial Q_{v,h}(\lambda, u) / \partial \lambda$  обратима для всех  $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$  и справедливы неравенства I–5) теоремы 1.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Джумабаев Д.С., Темешева С.М. Метод параметризации решения нелинейных двухточечных краевых задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47, № 1. С. 39-63.

2. Темешева С.М. О сходимости одного алгоритма метода параметризации // Матем. журнал. 2010. Т. 10, № 1(35). С. 83-92.

#### Résumé

Жөн дифференциалдық тендеулер жүйесі үшін бейсызық екі нүктелі шарттың есептің оқшауланған шешімі болуының қажетті және жеткілікті шарттары тағайындалды.

#### Summary

The necessary and sufficient conditions of existence isolated solution of nonlinear two points boundary value problem for the system of ordinary differential equations are established