Б. К. ТЕМИРОВ

(Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, г. Бишкек, ул. Фрунзе, 547)

ОСЦИЛЛЯЦИЯ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С КОНЕЧНЫМИ РАЗНОСТЯМИ ПЯТОГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ ЧЛЕНОМ

Аннотация

В статье установлены достаточные условия осцилляции решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями пятого порядка с нелинейным интегральным членом. Такие уравнения широко применяются в науке и технике при описании реальных процессов систем, в частности, электрических, механических, биологических, демографических, экономических и других. А также для решения некоторых теоретических вопросов с применением ЭВМ для приближенного решения различных задач математической физики.

Ключевые слова: осцилляция, нелинейный интегральный член, неравенство Иенсена.

Кілт сөздер: осцилляция, сызықты емес интеграл мүшесі, Иенсен теңсіздігі.

Keywords: oscillation, the nonlinear integral term, Jensen's inequality.

Введем обозначения: 1) $Q \subset R^m$ открытая ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\Gamma = \partial Q$; 2) $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in Q$; 3) $h(n)$, $\tau_i(n)$ – функции натурального аргумента, значения которых $\forall n \geq n_0$ являются натуральными числами $\lim_{n\to\infty} h(n) = \lim_{n\to\infty} \tau_i(n) = \lim_{n\to\infty} \tau(n) = \infty$; где n_0 – достаточно большое натуральное число; 4) $D_i\{n \geq n_i, x \in Q\}$ *i=0,1,2.* $\bar{D}_i\{n \geq n_0,, x \in \overline{Q}\}$. *i=0,1,2.* $D_0^0\{n \geq n_0,, y \in \overline{Q}\}$: 5) A_i (n,x) – непрерывные функции по $x \in \bar{Q}$ для каждого фиксированного натурального числа $n \geq n_0$, $i = 0,1,2$; 6) a(n)–заданная функция натурального аргумента; 7) $r(n) > 0 \quad \forall n \geq n_0$; 8) $L_0^0 = \sum_{i,k=1}^m \frac{\partial^z}{\partial x_i \partial x_k}$ – эллиптический оператор. Предполагаются, что а) для любого набора вещественных чисел ; $\sum_{i,k=1}^m A_{i,k}(x)\xi_i\xi_k \geq \mu \sum_{i,k=1}^m \xi_k{}^2, \mu > 0, j = 1,$ б) $A_{ik}(x) = A_{ik}$ – достаточно гладкие функции (достаточно предполагать, чтобы эти функции имели частные производные первого порядка, удовлетворяющие в замкнутой области Q некоторому условию Гельдера)

Определение 1. Всякую функцию U(n,x) называют правильной, если она определена в области D_0.

Определение 2. Правильную функцию U(n,x) называют неотрицательной {неположительной}, если $\exists\ n_1 \geq n_0$ такое, что $\forall$ (n,x) $\in D_1=\{ n\geq n_1, x \in Q\}$

1) либо U(n,x) ≥0, V(n)=$\int\limits_Q U(n,x)dx > 0$, 2) либо U(n,x) ≤ 0, V(n)=$\int\limits_Q U(n,x)dx > 0$

Определение 3. Правильную функцию U(n,x) называют не осциллирующей, если она либо неотрица-тельна, либо не положительна; в противном случае ее называют осциллирующей .

Рассмотрим уравнение в виде:

$$L_5[u(n,x)] + a(n)\sum_{i,k=1}^{m} A_{i,k}\ \frac{\partial^z}{\partial x_i \partial x_k} U[h_1(n),x] + A_1(n,x)U[h_1(n),x] + A_2(n,x)U[h_2(n),x] +$$

$$+\int_Q K(n,x,y)U[h_3(n),y]dy + a_0(n)U[\tau(n),x] + A_3(n,x) f\{\int_Q N(n,x,y)U[\sigma(n),y]dy\} = 0$$
(1)

Где: 1) $\xi(n,x,u) = \int_Q N(n,x,y)U[\sigma(n),y]dy$ **;**

2) $A_3(n,x), N(n,x,y) \geq 0 \quad \forall (n,x,y) \in \overline{D}_0, \forall z > 0,\ f(z) > 0.\ f(-z) = -f(z),$
$\lim_{n\to\infty} \sigma(n) = \infty$

3) K(n,x,y), N(n,x,y), A_k(n,x)- заданные функции, определенные в области D_0^0 ;

4) A_k(n,x) $\in (F),$, где (F)-обозначает множество всех функций {V(n,x)}, имеющих непрерывные частные производные всех порядков по $x_1, x_2, \ldots, x_m; \forall x \in Q$ для каждого фиксированного натуральнего $n \geq n_0$ и удовлетворяющих тождеству V(n,x) $|_{Г} \equiv 0$ $\forall n \geq n_0;$ 6) $K(n,x,y) \geq 0, N(n,x,y) \geq 0 \forall (n,x,y) \in D_0^0$ непрерывна $\forall y \in$ при фиксированном (n,x) $\in \overline{D}_0, K(n,x,y)N(n,x,y) \in (F)$ по аргументу x, $\forall (n,y) \in \overline{D}_0$.

Введем обозначения: $L_1(v)=V(n+1)-V(n)$, $W_1(n)=P_1(n)L_1(v)$

$L_2(v) = \Delta W_1(n)$ $W_2(n)=P_2(n)L_2(v)=P_2(n)\Delta W_1(n)$ $L_3(v)=\Delta W_2(n)$ $W_3(n)=P_3(n)L_3(v)=P_3(n)\ \Delta\ W_2(n)$

$L_4(v) = \Delta W_3(n)$ $W_4(n)=P_4(n)L_4(v)=P_4(n)\Delta W_3(n)$ $L_5(v)= \Delta W_4(n)$. Пусть $P_k(n)>0\ \forall\ n \geq n_0$ (k=2,3,4,5) – заданные функции, $q_к(n) = \dfrac{1}{p_к\ (n)}$.

Осцилляция решений интегро-дифференциально-разностных уравнений с конечными разностями с нелинейным интегральным членом I, II, III и IV порядков с эллиптическим оператором исследованы в работах [2, 3, 5]. Скажем, что выполнены: а) условие (E_0), если (n,x,y) D_0 выполнено неравенство $A_1(n,x)$- a (n)≥ $a_1(n) \geq 0$; $A_2(n,x) \geq a_2(n) \geq 0$; $A_3(n,x) \geq a_3(n) \geq 0$;

б) условие (E_1), если (n,x,y) D_0 ; $K(n,x,y) \geq a(n,x) \geq 0; \int_Q a(n,x)dx \geq a_3(n) \geq 0$, $\forall(n,x,y) \in D_0^0$; в) условие (V_0), если $p_k(n)>0$ $\forall n \geq n_0$, k=2,3,4,5, $q_k(n)$=;

г) условие (E_2), если $\forall(n,x,y) \in D_0^0 \int_Q A_3(n,x)dx \geq a_4(n) \geq 0$. Известно [4], что все собственные значения краевой задачи

$$L_0У(x)+ {}_0У(x)=0, \ У(x)|_{г}=0 \tag{2}$$

положительны и наименьшему собственному значению соответствует единственная нормированная собственная функция Ф(x)>0, $\forall$ x Q (нормированная в смысле. $\int_Q \Phi(x)dx = 1$. Если Q{a_k<x_k<$в_k$, k=1,m}- параллелепипед, то $\lambda_0 = \sum_{k=1}^{m} = \frac{\pi^2}{(b_k - a_k)^2}$; Ф(x)= $l\sum_{r=1}^{m} \sin\frac{\pi(x_k - a_k)}{b_k - a_k}$; Если Q-выпуклая область, то $\lambda_0 \geq \frac{\pi^2}{4}(\frac{1}{\rho} - \frac{m-1}{\alpha})$, где *р*-радиус наибольшего шара, вписанного в область Q, *a* – диаметр области Q; *m* – размерность области Q.

Лемма 1. Пусть 1) 2) *f* (z)-неубывающая функция z>0. Тогда неравенство

$$L_5[v(n)]+a(n) \ [v(n)] \leq 0 \tag{3}$$

не имеет положительного решения.

Доказательство. Допустим, что неравенство (3) имеет положительное решение v(n)>0 $\forall$ $n \geq n_1$. Тогда $\Delta w_4(n) \leq 0$.следовательно $w_4(n)$-невозрастающая функция. Логически возможны только следующие допущение: 1) либо $n_2 \geq n_1$ такое, что $w_4(n)$=c<0; 2) либо $w_4(n) \geq 0$ $\forall$ $n \geq n_1$.

Рассмотрим первый случай. Докажем, что предположение противоречит неравенству v(n)>0 $\forall$ $n \geq n_1$.Имеем $W_4(n)=P_4(n)\Delta w_3(n) \leq c<0$ $\forall$ $n \geq n_2$. Следовательно: $\Delta w_3(n) \leq$. Суммируя от n_2 до n-1 получим

$$W_3(n) \leq w_3(n_2)+c \sum_{n_2}^{n-1} qm(s) \to -\infty \text{ при } n \to \infty, m=2,3,4$$

Отсюда следует, что c_1<0, $n_3 \geq n_2$ такие, что $W_3(n) \leq c_1<0$ $\forall$ $n \geq n_3$

Продолжая аналогичные рассуждения, получим, что c_0<c, $n^1 \geq n^0$ такие, что

$$W_2(n) \leq c_0<0 \ \forall \ n \geq n^1 \ P_2(n) \ \Delta v(n) \leq c_0<0 \ \forall \ n \geq n^1, \ \Delta v(n) \leq c_0 q_2(n)$$

суммируя от n^1 до n-1, получим $v(n) \leq v(n^1)+c_0 \sum_{S=n^1}^{n-1} q_2(S) \to -\infty$ при $n \to \infty$.

Это соотношение противоречит неравенству $v(n) > 0 \quad \forall \quad n \geq n_1$, следовательно, первое предполо-жение несостоятельно.

Рассмотрим второй случай. $w_4(n) = p_4(n)\Delta w_3(n) \geq 0 \quad \forall \quad n \geq n_1$

$w_3(n)$-неубывающая функция $\forall\ n \geq n_1$. Логически возможны только следующие предположения

а) либо $\exists\ n_2 \geq n_1$ такое, что $w_3(n_2) = c > 0$;

б) либо $\exists\ n_2 \geq n_1$ такое, что $w_3(n) \leq 0 \quad \forall \quad n \geq n_1$. Рассмотрим первый случай: $W_3(n) = P_3(n)\Delta w_2(n) \leq 0 \ \ \forall\ n \geq n_2$. Далее суммируя это неравенство от n_1 до n-1, имеем

$$W_2(n) \geq W_2(n_2) + c\sum_{S=2}^{n-1} q_3(S) \to \infty \text{ при } n \to +\infty.$$

Следовательно, $\exists \quad c_1 > 0, \exists\ n_3 \geq n_2$ такие, что $w_2(n) \geq C_1 \quad \forall \quad n \geq n_2$. Продолжая аналогичные рассуждения, получим, что $\exists\ c_0 > 0, \ \exists \ \ n^0 > n_0$ такие, что $w_2(n) = P_2(n)\Delta$ v $(n) \geq c_0$, следовательно, v(n) ≥ v(n^0)=γ. С учетом этого неравенства из (3) имеем $\Delta w_4(n)$ +a(n) $\leq 0 \ \forall \ n \geq n^0$, $\beta = f(\gamma)$.

Далее с учетом $w_4(n) \geq 0 \ \forall \ n \geq n_1$.Это неравенство противоречит условию 1)леммы 1. Следовательно предположение а) противоречит условиям леммы 1. Отсюда верно предположение в) что $w_3(n) \leq 0 \ \forall \ n \geq n_1$

$$W_3(n)=P_3(n)\Delta w_2(n) \leq 0 \ \forall \ n \geq n_1$$

$W_2(n)$-невозрастающая функция $\forall \ n \geq n_1$ Логически, возможны только следующие предположения:

1) либо $\exists \ n_2 \geq n_1$ такое, что $W_2(n)=c<0 \ \forall \ n \geq n_2$;

2) либо $w_2(n) \geq 0 \ \forall \ n \geq n_1$. Первое предположение противоречит неравенству $v(n)>0 \ \forall\ n \geq n_1$.Следовательно, $w_2(n) \geq 0 \ \forall \ n \geq n_1$.

Рассуждая аналогично получим, что $w_1(n) \geq 0$ $n \geq n_1$; Отсюда вытекает, что $v(n) \geq v(n_1) \equiv c_0 > 0$. С учетом этого неравенства из (3) имеем

$$\Delta w_4(n)+c\, a(n) \leq 0,\ f(c_0)=c \ \forall \ n \geq n_1.$$

Суммируя это неравенство от n_1 до n-1, имеем

$$w_4(n)+c\sum_{S=n_1}^{n-1} a(S) \leq w_4(n_1),\ \forall \ n \geq n_1.$$

Так как $w_4(n) \geq 0$,то отсюда следует, что неравенство $c\sum_{S=n_1}^{n-1} a(S) \leq w_4(n_1)$, противоречащее условию 1) леммы 1. Лемма 1 доказана.

Пример: Пусть $p_2(n)=n+\sqrt{n(n+1)}$; $p_2(n)=p_3(n)$; $p_4(n)=1$

a(n) = $\frac{2}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+2)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)\sqrt{n}}$; Тогда неравенство (3) имеет положительное решение v(n)=$\sqrt{n}$. Очевидно, что $a(n) \le \frac{1}{4n^2}$; $\sum a$(m)<∞. **Лемма 2.** Если 1) $\sum a$(m)=∞; 2) $f(z) > 0$-непрерывная неубывающая функция z>0, то для положительного решения v(n) неравенство (4) имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} v(n)=0 .$$

Будем говорить, что выполнено условие: (T_1) если во всех точках области ∀ (n,x) ∈ D_0 ∀ z>0,где z=U[τ (n),y] f(n,x,z)≥g_0(n) z, f(n,x,-z)≤-g_0(n) z, g_0≥0. Пример удовлетворяющий условию (T_1) : f(n,x.z)=g(n) z^a=g_0(n)z, $\alpha = \frac{p}{q} > 1$ -отношение двух нечетных чисел.

Лемма 3. Если выполнено условие (V_0); 2)неравенство $\Delta w_5(n) \le 0$ имеет положительное решение y(n)>0, ∀ n≥n_1,то y(n) является неубывающей функцией. **Лемма 4.** Пусть 1) выполнено условие (V_0),(E_0); 2) h(n),Δh(n) ≥0, ∀ n≥n_0 ; 3)∑ [a_1(m)+a_2(m)] ; 4) a(n)≥ 0 ∀ n≥n_0; 5)уравнение (1) имеет не осциллирующее решение U(n,x) ∈ (N), n≥n_0. Тогда неравенство

$$L_5(y)+a_1(n)y[h(n)]+a_2(n)y[h(n)]\le 0 \tag{7}$$

Имеет положительное решение y(n) и выполняется неравенство lim y(n)=0. **Теорема.** Пусть а) выполнены условия (E_0) (E_1) (E_2) (V_0) (T_1); б) $\sum^{\infty} A_3(m) = \infty$ в) f(z) – непрерывная функция $\forall z > 0$. Тогда каждое правильное решение $y(n) = |v(n)|$ уравнение (1) либо осциллирует, либо $\lim_{n\to\infty} y(n) = 0$

ЛИТЕРАТУРА

1 Быков Я.В, Мерзлякова Г.Д, Шевцов Е.М Об осцилляторности решений нелинейных разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1975. – № 8. – С. 1460-1473.

2 Быков Я.В. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями первого порядка. – Фрунзе: Илим, 1985. – 263 с.

3 Быков Я.В., Темиров Б.К. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями второго и высшего порядков. – Фрунзе: Илим, 1990. – 123 с.

4 Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.

5 Темиров Б.К. Осцилляция решений нелинейного интегро-разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка // Труды междунар. конф. «Программа системы:

теория и приложения» института программных систем РАН Череславль–Залесский. – 2006. – С. 379-387.

6 Харди Н.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г. Неравенство. – М.: НИЛ, 1946. – 456 с.

REFERENCES

1 Bykov Y.V., Merzlyakova G.D., Shevsov E.M. Ob ossilarnosti reshenii nelineinyh raznostnyh uravnenii // Differensialnye uravnenia. – 1975. – № 8. – С. 1460-1473.

2 Bykov Y.V. Ossiliasia reshenii operatorno raznostnyh uravnenii c konechnymi raznostiami pervogo poriadka. – Frunze: Ilim, 1985. – 263 c.

3 Bykov Y.V., Temirov B.K. Ossiliasia reshenii operatorno raznostnyh uravnenii c konechnymi raznostiami ftorogo i fysshego poriadkov. – Frunze: Ilim, 1990. – 123 c.

4 Vladimirov V.C. Uravnenia matematicheskoi fiziki. – M.: Nauka, 1981. – 512 c.

5 Temirov B.K. Ossiliasia reshenii nelineinogo integro. Raznostnogo uravnenia c konechnymi raznostiami tretego poridka // Trudy mejdunarodnoi konferensii «Programma sistemy: teoria I prilojenia» institute progrmnyh system RAN Chereslav–Zalesskii. – 2006. – S. 379-387.

6 Hardin N.G., Littlvud Dj.E., Polina G. Neravenstvo. – M.: NIL, 1946. – 454 c.

Резюме

Б. К. Теміров

(Ж. Баласағұн атындағы Қырғыз ұлттық университеті, Бішкек қ., Фрунзе, 547)

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ-АЙЫРЫМДЫ ШЕКТЕЛГЕН БЕСІНШІ РЕТТІК АЙЫРЫМЫ БАР БЕЙСЫЗЫҚ ИНТЕГРАЛДЫ МҮШЕЛЕРІ БАР ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ ШЕШІМІН ОССИЛИЯЦИЯЛАУ

Жұмыста бейсызық интегралды мүшелері бар бесінші реттік шектелген операторлы-айырмашылық теңдеулерді шешудің осцилляция тәсілінің қажетті шарттары белгіленген. Мұндай теңдеулер ғылымда және техникада жүйелердің нақты үдерістерін, әсіресе электрлік, механикалық, биологиялық, демографиялық, экономикалық және басқа құбылыстарды сипаттағанда кең қолданылады. Сонымен қатар ЭВМ қолдана отырып математикалық физиканың әртүрлі есептерін жуық түрде кейбір теориялық мәселелерді шешуге қолданылады.

Кілт сөздер: Осцилляция, сызықты емес интеграл мүшесі, Иенсен теңсіздігі.

Summary

B. K. Temirov

(Kyrgyz National University n.a. Y. Balasaghuni)

OSCILLATIONS OF SOLUTIONS OF THE FIFTH ORDER FINITE-DIFFERENCE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INTEGRAL TERM

In this paper, sufficient conditions of the oscillations of solutions of the fifth order finite-difference integro-differential equations with non-linear integral term. These equations are widely used in science and technology for description of real processes and systems including electrical, mechanical, biological, demographic, economic and other. And also to solve some theoretical problems with the use of computers for the approximate solution of various problems of mathematical physics.

Keywords: Oscillation, the nonlinear integral term, Jensen's inequality.

Поступила 27.03.2013г