

УДК 517.927.25

A. A. ТЕНГАЕВА, M. B. ИВАНОВА

БАЗИСНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ В ТЕРМИНАХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

В работе установлен тип краевых условий, когда система собственных функций соответствующей модельной обобщенной спектральной задачи образует базис Рисса.

Рассмотрим неклассический дифференциальный оператор

$$Lu = -u''(-x), \quad (1)$$

область определения $D(L)$, состоящей из функций, абсолютно непрерывных вместе со своей первой производной в интервале $(-1, 1)$ и удовлетворяющих краевым условиям

$$u'(-1) + u'(1) = 0, \quad u(-1) = 0. \quad (2)$$

Краевые условия (2) относятся, по терминологии работы [1], к так называемым перегулярным краевым условиям.

Известно [1], что оператор вида (1) с регулярными, в смысле работы [1], краевыми условиями образует базис Рисса в $L_2(-1, 1)$.

Поскольку краевые условия (2) не являются регулярными, то результаты работы [1] здесь не применимы. Поэтому возникает необходимость обоснованного изучения базисности собственных функций спектральной задачи типа

$$\begin{aligned} -u''(-x) &= \lambda u(x), \\ u'(-1) + u'(1) &= 0, \quad u(-1) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Пользуясь линейно независимыми решениями

$$u_1(x) = e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}, \quad u_2(x) = e^{i\pi x} + e^{-i\pi x}, \quad \rho = \sqrt{\lambda}$$

уравнения из (3), несложно убедиться, что спектральная задача (3) имеет две серии собственных значений

$$\begin{aligned} \lambda_k^{(1)} &= -(k + \frac{1}{2})^2 \pi^2, \quad \lambda_k^{(2)} = (k + \frac{1}{2})^2 \pi^2, \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Соответствующие собственные функции имеют вид

$$u_{k1}(x) = \sin(k + \frac{1}{2})\pi x + (-1)^k \frac{e^{(k+\frac{1}{2})\pi x} + e^{-(k+\frac{1}{2})\pi x}}{e^{(k+\frac{1}{2})\pi} + e^{-(k+\frac{1}{2})\pi}},$$

$$u_{k2}(x) = \cos(k + \frac{1}{2})\pi x.$$

Обычным способом находим, что сопряженная спектральная задача имеет вид:

$$\begin{aligned} -v''(-x) &= \bar{\lambda} v(x), \quad -1 < x < 1, \\ v'(-1) &= 0, \quad v(-1) + v(1) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Собственные значения прямой задачи, в силу их вещественности, так же служат собственными значениями сопряженной задачи (4). Первой серии собственных значений $\lambda_k^{(1)} = -(k + \frac{1}{2})^2 \pi^2$ отвечают собственные функции $v_{k1}(x) = \sin(k + \frac{1}{2})\pi x$, а второй серии собственных значений $\lambda_k^{(2)} = (k + \frac{1}{2})^2 \pi^2$ соответствуют собственные функции

$$v_{k2}(x) = \cos(k + \frac{1}{2})\pi x + (-1)^{k+1} \frac{e^{(k+\frac{1}{2})\pi x} - e^{-(k+\frac{1}{2})\pi x}}{e^{(k+\frac{1}{2})\pi} - e^{-(k+\frac{1}{2})\pi}},$$

Непосредственным вычислением можно убедиться в том, что системы

$$\begin{aligned} \{ u_{k1}(x) &= \sin(k + \frac{1}{2})\pi x + (-1)^k \frac{e^{(k+\frac{1}{2})\pi x} + e^{-(k+\frac{1}{2})\pi x}}{e^{(k+\frac{1}{2})\pi} + e^{-(k+\frac{1}{2})\pi}}, \\ u_{k2}(x) &= \cos(k + \frac{1}{2})\pi x \} \end{aligned} \quad (5)$$

и

$$\begin{aligned} \{ v_{k1}(x) &= \sin(k + \frac{1}{2})\pi x, \\ v_{k2}(x) &= \cos(k + \frac{1}{2})\pi x + (-1)^{k+1} \frac{e^{(k+\frac{1}{2})\pi x} - e^{-(k+\frac{1}{2})\pi x}}{e^{(k+\frac{1}{2})\pi} - e^{-(k+\frac{1}{2})\pi}}, \} \end{aligned} \quad (6)$$

образуют пару биортогонально сопряженных систем, т.е. для них выполнены равенства $(u_g(x), v_m(x)) = 1$ только при $i = m$ и $j = n$, а $(u_g, v_m) = 0$ при любых других соотношениях индексов.

Справедлива следующая

Теорема 1. Каждая из систем (5), (6), состоящая из собственных функций сопряженных обобщенных спектральных задач (3), (4) соответственно, образует базис Рисса в $L_2(-1,1)$.

Теорема будет доказана [2, с. 19], [3] если мы докажем бесселевость каждой из систем (5), (6), т.е. справедливость неравенств

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int f \cos(k + \frac{1}{2})\pi x \right|^2 < \infty, \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int f \sin(k + \frac{1}{2})\pi x + (-1)^k \frac{e^{(k+\frac{1}{2})\pi x} + e^{-(k+\frac{1}{2})\pi x}}{e^{(k+\frac{1}{2})\pi} + e^{-(k+\frac{1}{2})\pi}} \right|^2 < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int f \sin(k + \frac{1}{2})\pi x \right|^2 < \infty, \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int f \cos(k + \frac{1}{2})\pi x + (-1)^{k+1} \frac{e^{(k+\frac{1}{2})\pi x} - e^{-(k+\frac{1}{2})\pi x}}{e^{(k+\frac{1}{2})\pi} + e^{-(k+\frac{1}{2})\pi}} \right|^2 < \infty$$

для любой функции $f(x) \in L_2(-1,1)$.

Нетрудно убедиться в том, что функции $\cos(k + \frac{1}{2})\pi x$, $\sin(k + \frac{1}{2})\pi x$ являются элементами полной ортонормированной системы в $L_2(-1,1)$. Поэтому первые из неравенств в (7) и в (8) представляют собой неравенство Бесселя для ортонормированной системы. Вследствие этого докажем второе неравенство в (7), а второе неравенство в (8) доказывается аналогично.

Так как

$$\left| \int f \sin(k + \frac{1}{2})\pi x + (-1)^k \frac{e^{(k+\frac{1}{2})\pi x} + e^{-(k+\frac{1}{2})\pi x}}{e^{(k+\frac{1}{2})\pi} + e^{-(k+\frac{1}{2})\pi}} \right|^2 \leq$$

$$\begin{aligned} & \text{членаму} \left| \int f \sin(k + \frac{1}{2})\pi x + (-1)^k \frac{e^{(k+\frac{1}{2})\pi x} + e^{-(k+\frac{1}{2})\pi x}}{e^{(k+\frac{1}{2})\pi} + e^{-(k+\frac{1}{2})\pi}} \right|^2 \\ & \text{членаму} \leq 2 \left| \int f, (-1)^k \frac{e^{(k+\frac{1}{2})\pi x} + e^{-(k+\frac{1}{2})\pi x}}{e^{(k+\frac{1}{2})\pi} + e^{-(k+\frac{1}{2})\pi}} \right|^2 + \\ & + 2 \left| \int f, \sin(k + \frac{1}{2})\pi x \right|^2, \end{aligned}$$

и второе слагаемое в правой части последнего соотношения есть коэффициенты Фурье по ортонормированной системе, то остается доказать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int f, (-1)^k \frac{e^{(k+\frac{1}{2})\pi x} + e^{-(k+\frac{1}{2})\pi x}}{e^{(k+\frac{1}{2})\pi} + e^{-(k+\frac{1}{2})\pi}} \right|^2.$$

Далее, дословно повторяя рассуждения из работы [4], убеждаемся в справедливости теоремы 1.

Доказанный результат позволяет утверждать следующее.

Теорема 2. Система собственных функций неклассического оператора (1) образует базис Рисса в $L_2(-1,1)$ в каждом из следующих случаев:

$$\nu'(-1) + \nu'(1) = 0, \quad \nu(-1) + \alpha\nu(1) = 0; \quad (9)$$

$$\nu'(-1) - \alpha\nu'(1) = 0, \quad \nu(-1) + \nu(1) = 0, \quad (10)$$

если только $\alpha^2 \neq 1$.

Для доказательства теоремы введем в рассмотрение оператор $E - \alpha S$, где E – единичный оператор в $L_2(-1,1)$, а $(Sf)(x) = f(-x)$ для любой функции $f(x) \in L_2(-1,1)$. Линейный оператор $E - \alpha S$ при $\alpha^2 \neq 1$, ограниченный, обратимый и $(E - \alpha S)^{-1} = (1 - \alpha^2)^{-1} (E + \alpha S)$.

Несложно убедиться в том, что если $u(x)$ удовлетворяет равенствам (3), то функция $\omega(x) = ((E - \alpha S)u)(x)$ при $\alpha^2 \neq 1$ удовлетворяет уравнению

$$-\omega''(-x) = \lambda\omega(x) \quad (11)$$

и краевым условиям типа (9).

Если же функция $u(x)$ удовлетворяет равенствам (4), то при $\alpha^2 \neq 1$ функция $\omega(x) = ((E - \alpha S)u)(x)$ удовлетворяет уравнению (11) и краевым условиям вида (10).

Тем самым, собственные функции краевых задач (3) и (11), (9) связаны между собой ограниченным обратимым преобразованием ($E-\alpha S$). Поэтому по теореме Н. К. Бари [2, с. 19], [3] из базисности Рисса системы собственных функций спектральной задачи (3) вытекает утверждение теоремы 2 на случай краевых условий (9). Случай краевых условий (10) доказывается аналогично.

Заметим, что операторы типа $E-\alpha S$ были использованы в [5] для доказательства вольтерровости некоторых спектральных задач.

В заключении заметим, что теорема 1 установлена усилиями обеих авторов, а теорема 2 доказано А. Тенгаевой самостоятельно.

Авторы выражают искреннюю признательность участникам научного семинара под руководством М. А. Садыбекова и А. М. Сарсенби за обсуждение результатов и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- Сарсенби А.М. Безусловные базисы, связанные с неклассическим дифференциальным оператором второго порядка // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 4. С. 506-511.

2. Сарсенби А.М. Теория базисности корневых векторов линейных несамосопряженных дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве. Шымкент. 2009. 269 с.

3. Бари Н.К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Ученые записки МГУ. 1951. Т. 4, вып. 148. С. 69-107.

4. Сарсенби А.М. О базисности Рисса системы собственных функций одной краевой задачи для уравнения $-u''(-x) = \lambda u(x)$ // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. 2007, № 3. С. 32-34.

5. Баязитов Б.Н. О спектральных свойствах корректных сужений и расширений одного класса дифференциальных операторов // Дис. ... к. физ.-мат. н. Алма-Ата, 1989.

Резюме

Екінші ретті қаралайым дифференциалдық оператор үшін жалпылама спектральдық есептің меншікті функцияларының Рисс базасы болуын қамтамасыз еттін шеттік шарттар көлтірілген.

Summary

It is installed that system own function generalised spectral problem for model differential operator 2 orders with some marginal condition forms the base Rissa.

Международный гуманитарно-технический университет, г. Шымкент;
ЮКТУ им. М. Ауэзова,
г. Шымкент

Поступила 20.04.2010г.