УДК 510.6

К. М. ТУЛЕНБАЕВ

ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ ОДНОГО КЛАССА TORTKEN АЛГЕБР

Данная статья посвящена доказательству того факта, что специальный параметрический класс TORTKEN алгебр, заданный умножением на базисных элементах условием e(i)*e(j) = (i+j+ε)*e(i+j), где параметром является ε, неизоморфны. TORTKEN алгебры имеют большое применение в теории динамических систем [3] и являются новым классом неассоциативных алгебр [4].

Алгебра A удовлетворяет тождеству TORTKEN, если для любых элементов a, b, c, d выполняется тождество: (a*b)*(c*d)-(a*d)*(c*b) = = (a, b, c)*d-(a, d, c)*b, где ассоциатор (a, b, c) = = a*(b*c)-(a*b)*c [1].

Пример 1. Алгебра с умножением, заданным на базисных элементах умножением $e_i * e_j = (i + j + \varepsilon)e_{i+j}$ является TORTKEN алгеброй.

Пример 2. Алгебра C[x] с умножением $x^m * x^n = n/(n+m) * x^{n+m}$ [2] также удовлетворяет тождеству TORTKEN.

Рассмотрим алгебру $\widetilde{A}_\varepsilon = \prec e_i, i \geq -\varepsilon \succ$ со следующим умножением

$$i + j \prec -\varepsilon \quad то \quad e_i * e_j = 0 \text{ и}$$

$$e_i * e_j = (i + j + \varepsilon)e_{i+j},$$

если $i + j \geq -\varepsilon \quad \varepsilon \in N$

Докажем следующую теорему.

Теорема. Пусть $\widetilde{A}_\mu = \prec e_j^i, \ j \geq -\mu \succ$, где $\mu \in N$, тогда для различных μ алгебры A_μ неизоморфны.

Доказательство. От противного. Пусть $\varphi : \widetilde{A}_\varepsilon \to \widetilde{A}_\mu$ является изоморфизмом, тогда

$$\varphi(e_i) = V_i = \sum_j^{k(i)} C_{i,k(i)} e_{k(i)}^j .$$

Получаем, что

$$k(i+j)=k(i)+k(j) \qquad i,j\in N\cup\{0\}$$

$$k(i)=a*i \qquad a\in N$$

$$e_{-1}*e_{-\varepsilon}=0$$

$$(\sum c_{-1,-a}\, e'_{-a})(\sum c_{-\varepsilon,-a\varepsilon}\, e'_{-a\varepsilon})\Rightarrow e'_{-a}*e'_{-a\varepsilon}=0.$$

$$-a-a\varepsilon\geq-\mu$$

Обозначим $f(i)=c_{i,a*i}$, тогда выполнено следующее соотношение:

$$\frac{(i+j)f(i+j)}{f(i)f(j)}-a(i+j)=\varepsilon=\text{const}.$$

Пусть $f(1)=b$, тогда верны следующие тождества:

1) $\dfrac{2f(2)}{b^2}-2a=\varepsilon \quad\Rightarrow f(2)=\dfrac{2a+\varepsilon}{2}b^2;$

2) $\dfrac{(1+2)f(3)}{f(1)f(2)}-3a=\varepsilon$

$$f(3)=\frac{3a+\varepsilon}{3}f(1)f(2)=\frac{3a+\varepsilon}{3}\cdot\frac{2a+\varepsilon}{2}b^3;$$

3) $\dfrac{(1+3)f(4)}{f(1)f(3)}-4a=\varepsilon=\dfrac{(2+2)f(4)}{f(2)*f(2)}-4a$

$$f(1)f(3)=f(2)*f(2)$$

$$b*\frac{3a+\varepsilon}{3}*\frac{2a+\varepsilon}{2}*b^3=\frac{2a+\varepsilon}{2}*\frac{2a+\varepsilon}{2}*b^4$$

$$(b=0)\ (\frac{2a+\varepsilon}{2}=0)\ (\frac{3a+\varepsilon}{3}=\frac{2a+\varepsilon}{2}\Rightarrow\varepsilon=0)$$

Аналогично для $b\in N\ \ -b-b_\mu\geq-\varepsilon$

$$\begin{cases}a\varepsilon+a\leq\mu\\ b\mu+b\leq\varepsilon\end{cases}$$

$$a,b\in N\quad \mu,\varepsilon\in N$$

$$\begin{cases}a\varepsilon+a\leq\mu \quad\Rightarrow\quad \varepsilon\leq\dfrac{\mu}{a}-1\\ b\mu+b\leq\varepsilon\end{cases}$$

$b_\mu+b\leq\dfrac{\mu}{a}-1$, что невозможно.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Amitsur S.A., Levitzki J.* Minimal identities for algebras // Proc. A.M.S. 1950. № 1. P. 449-463.

2. *Cayley A.* On the theory of analytical forms called trees // Phil. Mag.1857. № 13. P. 19-30.

3. *Балинский А.А., Новиков С.П.* Скобки Пуассона гидродинамического типа // Фробениусовы алгебры и алгебры Ли. ДАН СССР. 283.1985. №5. С. 1036-1039.

4. *Шестаков И.П., Кузьмин.* Неассоциативные структуры // ВИНИТИ. Сер. Итоги Науки и Техники. 1990. С. 186-187.

Резюме

Бұл мақала TORTKEN алгебралардың арнайы параметрлік класының параметрі ε болатын e(i)*e(j) = = (i+j+ε)*e(i+j) жағдайындағы базистік элементке берілген көбейтуде изоморфсыз екенін дәлелдеу факторына арналған. TORTKEN алгебраларды динамикалық жүйелер теориясында үлкен қолданыска ие және ассоциативті емес алгебралардың жаңа класы болып саналады.

Summary

This article is devoted to proof of theorem that one class of TORTKEN algebras for different values of parameters are not isomorphic. The properties of TORTKEN algebras are in wide use in theory of dynamical systems and theoretical physics. TORTKEN algebras were introduced by academician A. S. Dzhumadil'daev. Now non-associative structures like Lie algebras and TORTKEN algebras have been intensively studied by foreign mathematicians. The problem of classification of simplicity and isomorphism of TORTKEN algebras is still open. This article is the first step to solving this problem.

Институт Математики
МОН РК, г. Алматы

Поступила 25.10.10г.