А. Н. ТЮРЕХОДЖАЕВ, Г. А. КАРЫБАЕВА

РЕШЕНИЕ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

(Представлена академиком НАН РК Н. К. Блиевым)

Рассмотрено неоднородное нелинейное уравнение теплопроводности с переменными теплофизическими характеристиками при краевых условиях первого рода. Несмотря на большое развитие и потенциальные возможности численных методов решения тепловых задач, аналитическое изучение процессов теплопроводности, по-прежнему, является одним из основных разделов современных инженерных исследований. В данной работе получено аналитическое решение задачи методом частичной дискретизации нелинейных дифференциальных уравнений профессора А. Н. Тюреходжаева для произвольного изменения теплофизических характеристик. Построены графики для мерзлого грунта на программе MathCAD.

Рассматривается нелинейное уравнение теплопроводности с переменными теплофизическими характеристиками общего вида. Методом частичной дискретизации нелинейных дифференциальных уравнений профессора А. Н. Тюреходжаева [1] и посредством преобразования Лапласа [2] получено аналитическое решение задачи.

Дифференциальное уравнение теплопроводности рассматриваемой задачи

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_0 u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)=\rho(x)c(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \tag{1}$$

где $u(x,t)$ – температура; $k(x)$ – коэффициент теплопроводности; $\rho(x)$ – плотность; $c(x)$ – удельная теплоемкость; k_0 – произвольная постоянная.

Следовательно

$$\frac{\partial^2 u^2(x,t)}{\partial x^2}=\frac{2}{k_0}\rho(x)c(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}. \tag{2}$$

Примем следующие начальные и граничные условия

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad u(0,t)=\mu_1(t), \qquad u(l,t)=\mu_2(t). \tag{3}$$

Применяя интегральное преобразование Лапласа к задаче (1)-(2), получим

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\overline{u^2}(x,p)\right]=\frac{2}{k_0}c(x)\rho(x)\left[p\bar{u}(x,p)-\varphi(x)\right], \tag{4}$$

$$\bar{u}(0,p)=\bar{\mu}_1(p), \qquad \bar{u}(l,p)=\bar{\mu}_2(p), \tag{5}$$

где p – комплексный параметр преобразования.

Частичная дискретизация уравнения (4), дает

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\overline{u^2}(x,p)\right]=\frac{1}{k_0}\sum(x_k+x_{k+1})\left[c(x_k)\rho(x_k)\left[p\bar{u}(x_k,p)-\varphi(x_k)\right]\cdot\delta(x-x_k)-\right.$$
$$\left.-c(x_{k+1})\rho(x_{k+1})\left[p\bar{u}(x_{k+1},p)-\varphi(x_{k+1})\right]\cdot\delta(x-x_{k+1})\right], \tag{6}$$

где $\delta(x-x_k)$ – дельта-функция Дирака.

Интегрируя (6), получим

$$\overline{u^2}(x,p)=\frac{1}{k_0}\sum(x_k+x_{k+1})\left[Y(x,x_k)\left[p\bar{u}(x_k,p)-\varphi(x_k)\right]-\right.$$
$$\left.-Y(x,x_{k+1})\left[p\bar{u}(x_{k+1},p)-\varphi(x_{k+1})\right]\right]+A(p)x+B(p), \tag{7}$$

где $H(x-x_k)$ – единичная функция Хевисайда,

$$Y(x,x_k)=c(x_k)\rho(x_k)(x-x_k)H(x-x_k).$$

Учитывая граничные условия (5), имеем

$$\overline{u^2}(x,p)=\overline{M}(p)+\frac{1}{k_0}\sum(x_k+x_{k+1})\Big[Y(x,x_k)\big[p\overline{u}(x_k,p)-\varphi(x_k)\big]-$$

$$-Y(x,x_{k+1})\big[p\overline{u}(x_{k+1},p)-\varphi(x_{k+1})\big]\Big]-\frac{1}{k_0}\sum(x_k+x_{k+1})\Big[Y(l,x_k)\big[p\overline{u}(x_k,p)-\varphi(x_k)\big]-$$

$$-Y(l,x_{k+1})\big[p\overline{u}(x_{k+1},p)-\varphi(x_{k+1})\big]\Big], \qquad (8)$$

где

$$\overline{M}(x,p)=\overline{\mu_1^2}(p)+\frac{x}{l}\left(\overline{\mu_2^2}(p)-\overline{\mu_1^2}(p)\right).$$

Проведя обратное преобразование Лапласа к уравнению (8), получим

$$u^2(x,t)=M(x,t)+\frac{1}{k_0}\sum(x_k+x_{k+1})\left[Y(x,x_k)\frac{du(x_k,t)}{dt}-Y(x,x_{k+1})\frac{du(x_{k+1},t)}{dt}\right]-$$

$$-\frac{1}{k_0}\sum(x_k+x_{k+1})\left[Y(l,x_k)\frac{du(x_k,t)}{dt}-Y(l,x_{+1})\frac{du(x_{k+1},t)}{dt}\right], \qquad (9)$$

где

$$M(x,t)=\mu_1^2(t)+\frac{x}{l}\left(\mu_2^2(t)-\mu_1^2(t)\right).$$

Определим выражение $u(x_k,t)$ в точках x_k.

$k=1$, $x_1=0$. $\qquad u(x_1,t)=\mu_1(t)$. $\qquad (10)$

$$k=2,\quad u^2(x_2,t)=M(x_2,t)+\frac{1}{k_0}(x_1+x_2)\left[Y(x_2,x_1)-Y(x_2,x_1)\right]\cdot\frac{du(x_1,t)}{dt}-A_2\frac{du(x_2,t)}{dt},$$

где

$$A_2=\frac{1}{k_0}(x_3-x_1)Y(l,x_2).$$

$$\frac{du(x_2,t)}{dt}=\frac{1}{A_2}M(x_2,t)+\frac{1}{k_0A_2}(x_1+x_2)\left[Y(x_2,x_1)-Y(l,x_1)\right]\frac{du(x_1,t)}{dt}-\frac{1}{A_2}u^2(x_2,t). \qquad (11)$$

$k=\overline{3,n}$,

$$u^2(x_k,t)=M(x_k,t)+\frac{1}{k_0}\sum_{i=1}^{k-2}(x_i+x_{i+1})\left[\left[Y(x_k,x_i)-Y(l,x_i)\right]\cdot\frac{du(x_i,t)}{dt}-\left[Y(x_k,x_{i+1})-Y(l,x_{i+1})\right]\times\right.$$

$$\left.\times\frac{du(x_{i+1},t)}{dt}\right]+\frac{1}{k_0}(x_{k-1}+x_k)\left[Y(x_k,x_{k-1})-Y(l,x_{k-1})\right]\frac{du(x_{k-1},t)}{dt}-A_k\frac{du(x_k,t)}{dt},$$

где

$$A_k = \frac{1}{k_0}(x_{k+1} - x_{k-1})Y(l, x_k).$$

$$\frac{du(x_k,t)}{dt} = \frac{1}{A_k}M(x_k,t) + \frac{1}{k_0 A_k}\sum_{i=1}^{k-2}(x_i + x_{i+1})\left[[Y(x_k,x_i) - Y(l,x_i)]\cdot\frac{du(x_i,t)}{dt} - \right.$$

$$\left. -[Y(x_k,x_{i+1}) - Y(l,x_{i+1})]\cdot\frac{du(x_{i+1},t)}{dt}\right] + \frac{1}{k_0 A_k}(x_{k-1} + x_k)[Y(x_k,x_{k-1}) - Y(l,x_{k-1})]\times$$

$$\times\frac{du(x_{k-1},t)}{dt} - \frac{1}{A_k}u^2(x_k,t). \qquad (12)$$

Интегрируем (11)–(12), и записываем для $k = \overline{2,n}$

$$u(x_k,t) = \frac{1}{A_k}M_1(x_k,t) + B_k(t) - \frac{1}{A_k}\int u^2(x_k,t)dt + C_k, \qquad (13)$$

где

$$B_2(t) = \frac{1}{k_0 A_2}(x_1 + x_2)[Y(x_2,x_1) - Y(l,x_1)]u(x_1,t),$$

$$B_k(t) = \frac{1}{k_0 A_k}\sum_{i=1}^{k-2}(x_i + x_{i+1})[[Y(x_k,x_i) - Y(l,x_i)]\cdot u(x_i,t) - [Y(x_k,x_{i+1}) - Y(l,x_{i+1})]\times$$

$$\times u(x_{i+1},t)] + \frac{1}{k_0 A_k}(x_{k-1} + x_k)[Y(x_k,x_{k-1}) - Y(l,x_{k-1})]u(x_{k-1},t),$$

$$M_1(x,t) = \int M(x,t)dt,$$

C_k – постоянные интегрирования.

Дискретизируя третий член правой части уравнения (13), получим

$$u(x_k,t) = \frac{1}{A_k}M_1(x_k,t) + B_k(t) - \frac{1}{2A_k}\sum(t_m + t_{m+1})\left[u^2(x_k,t_m)H(t - t_m) - u^2(x_k,t_{m+1})H(t - t_{m+1})\right] + C_k. \qquad (14)$$

С учетом начальных условий (2), получим C_k

$$C_k = \varphi(x_k) - \frac{1}{A_k}M_1(x_k,0) - B_k(0) + \frac{1}{2A_k}(t_1 + t_2)\varphi^2(x_k).$$

Тогда выражение (14) примет вид

$$u(x_k,t) = \frac{1}{A_k}(M_1(x_k,t) - M_1(x_k,0)) + B_k(t) - B_k(0) + \varphi(x_k) + \frac{1}{2A_k}(t_1 + t_2)\varphi^2(x_k) -$$

$$-\frac{1}{2A_k}\sum(t_m + t_{m+1})[u^2(x_k,t_m)H(t - t_m) - u^2(x_k,t_{m+1})H(t - t_{m+1})], \qquad (15)$$

где

$$B_2(0)=\frac{1}{k_0A_2}(x_1+x_2)[Y(x_2,x_1)-Y(l,x_1)]\varphi(x_1);$$

$$B_k(0)=\frac{1}{k_0A_k}\sum_{i=1}^{k-2}(x_i+x_{i+1})[[Y(x_k,x_i)-Y(l,x_i)]\cdot\varphi(x_i)-[Y(x_k,x_{i+1})-Y(l,x_{i+1})]\times$$

$$\times\varphi(x_{i+1})]+\frac{1}{k_0A_k}(x_{k-1}+x_k)[Y(x_k,x_{k-1})-Y(l,x_{k-1})]\varphi(x_{k-1}).$$

Определим выражение $u(x_k,t)$ в точках t_m:

При $m=1$, $t_1=0$

$$u(x_k,t_1)=\varphi(x_k).$$

При $m=2$

$$u(x_k,t_2)=\frac{1}{A_k}\left(M_1(x_k,t_2)-M_1(x_k,0)\right)+B_k(t_2)-B_k(0)+\varphi(x_k)-\frac{1}{2A_k}(t_3-t_1)u^2(x_k,t_2).$$

При $m=\overline{3,s}$.

$$u(x_k,t_m)=\frac{1}{A_k}\left(M_1(x_k,t_m)-M_1(x_k,0)\right)+B_k(t_m)-B_k(0)+\varphi(x_k)-$$

$$-\frac{1}{2A_k}\sum_{j=1}^{m-2}(t_j+t_{j+1})\left[u^2(x_k,t_j)-u^2(x_k,t_{j+1})\right]-\frac{1}{2A_k}(t_{m-1}+t_m)u^2(x_k,t_{m-1})+$$

$$+\frac{1}{2A_k}(t_1+t_2)\varphi^2(x_k)-\frac{1}{2A_k}(t_{m+1}-t_{m-1})u^2(x_k,t_m).$$

Отсюда получим алгебраические квадратные уравнения относительно $u(x_k,t_m)$ ($m=\overline{2,s}$), которые в общем виде пишутся в виде

$$a_{k,m}u^2(x_k,t_m)+u(x_k,t_m)+c_{k,m}=0,$$

где

$$a_{k,m}=\frac{1}{2A_k}(t_{m+1}-t_{m-1}),\ (m=\overline{2,s}),$$

$$c_{k,2}=-\frac{1}{A_k}(M_1(x_k,t_2)-M_1(x_k,0))-B_k(t_2)+B_k(0)-\varphi(x_k),\quad (m=2),$$

$$c_{k,m}=-\frac{1}{A_k}(M_1(x_k,t_m)-M_1(x_k,0))-B_k(t_m)+B_k(0)-\varphi(x_k)+$$

$$+\frac{1}{2A_k}\sum_{j=1}^{m-2}(t_j+t_{j+1})\left[u^2(x_k,t_j)-u^2(x_k,t_j)\right]+\frac{1}{2A_k}(t_{m-1}+t_m)u^2(x_k,t_{m-1})-$$

$$-\frac{1}{2A_k}(t_1+t_2)\varphi^2(x_k),\quad (m=\overline{3,s})$$

Следовательно

$$u_{1,2}(x_k,t_m)=\frac{-1\pm\sqrt{1-4a_{k,m}c_{k,m}}}{2a_{k,m}}. \qquad (16)$$

Получено аналитическое решение уравнения теплопроводности коэффициентом теплопроводности, линейно зависящей от температуры, и с переменной удельной теплоемкостью и плотностью.

Для построения графика рассмотрим пример для задачи (2)–(3), при

$$k(x,t)=k_0u(x,t),\ C(x)=c(x)\rho(x)=a_1+b_1x.$$

Тогда, уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial^2u^2(x,t)}{\partial x^2}=\frac{2}{k_0}(a_1+b_1x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}. \qquad (17)$$

Примем следующие начальные и граничные условия

$$u(x,0)=\varphi(x)=a_2+b_2x^2,\quad u(0,t)=\mu_1(t)=\alpha_1+10e^{\beta_1t},\quad u(l,t)=\mu_2(t)=\alpha_2-\gamma_2t^2e^{-\beta_2t}. \qquad (18)$$

При $x_1 = 0$, $t_1 = 0$

$$\varphi(0)=\mu_1(0),$$

следовательно

$$a_2=\alpha_1+10.$$

При $x_n = l$, $t_1 = 0$

$$\varphi(l)=\mu_2(0),$$

следовательно

$$\alpha_2=a_2+b_2l^2.$$

Вычислим значения $u(x_k,t_m)$ $k=\overline{1,n}$, $m=\overline{1,s}$, при расчетных данных $k_0=0,08\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot(^\circ\text{C})^2}$,

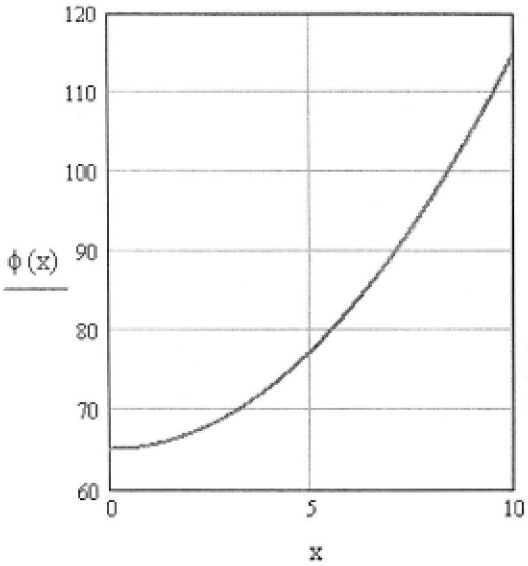

Рис. 1. Зависимость температуры от координаты при $t = 0$

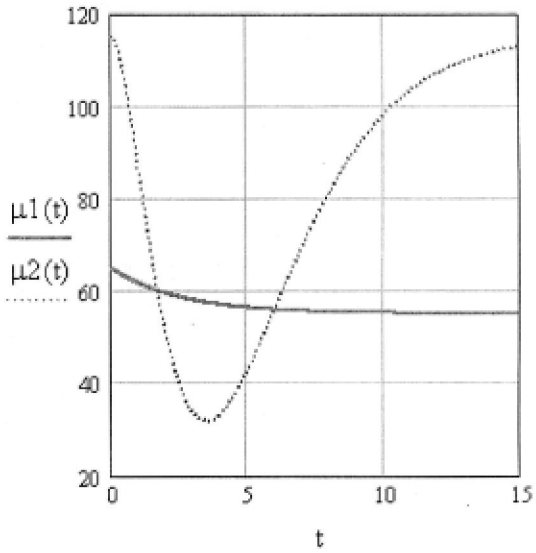

Рис. 2. Зависимость температуры от времени при $x = 0$ и $x = l$

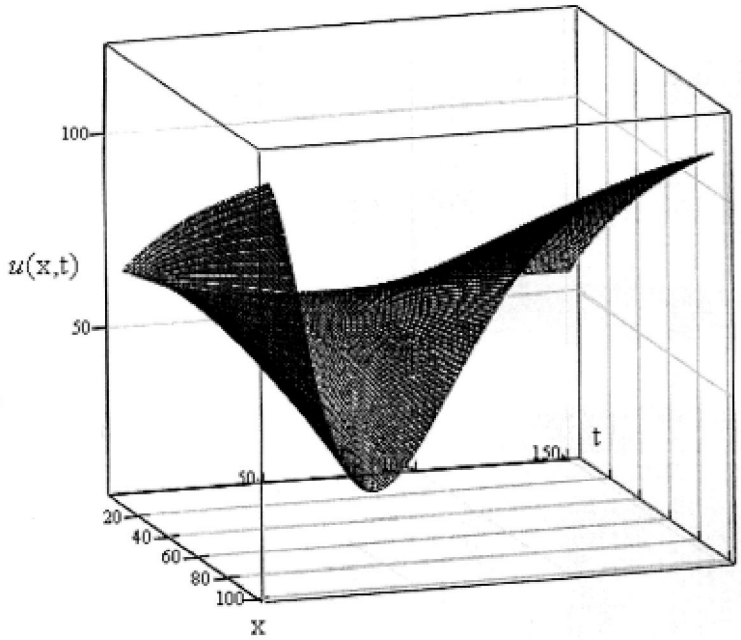

Рис. 3. График изменения температуры по времени и по координату

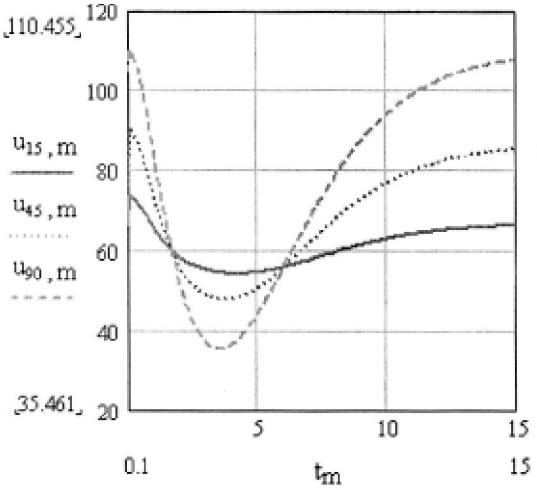

Рис. 4. Зависимость температуры от времени *t*

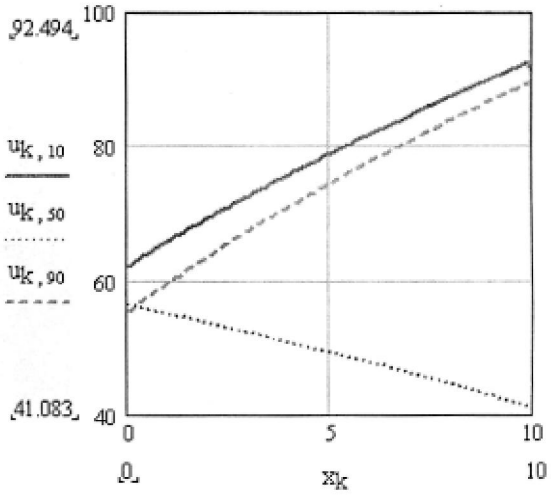

Рис. 5. Зависимость температуры от координаты *x*

$\alpha_1 = 55^\circ C$, $\beta_1 = -0,4$ ч$^{-1}$, $\alpha_2 = 106^\circ C$, $\beta_2 = 0,57$ ч$^{-1}$, $\gamma_2 = 50\frac{^\circ\text{C}}{\text{ч}}$, $a_1 = 1,35\cdot 10^{-6}\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3\cdot{}^\circ\text{C}}$,

$b_1 = 0,5\cdot 10^{-6}\frac{\text{Дж}}{\text{м}^4\cdot{}^\circ\text{C}}$, $a_2 = 65^\circ C$, $b_2 = 0,5\frac{^\circ\text{C}}{\text{м}^2}$, $l = 10$ м. Полученные решения приведены на рис. 1–5 на интервале времени t = 0–15 ч.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tyurekhodjaev A.N., Karybaeva G.A.* The analytical decision of the problem on non-uniform and non-linear heat conductivity // Reports of the third congress of the world mathematical society of Turkic countries. V. 1. Almaty, June 30-July 4, 2009. P. 292-298.

2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972-736 с.

3. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисления. М.: Физматтиз, 1962. 524 с.

Резюме

Бірінші текті шектік шарттардағы жылуфизикалық сипаттамалары айнымалы біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеуі қарастырылған. Жылу процестері есебін шешудің сандық әдістерінің қарқынды дамуы мен үлкен мүмкіндіктеріне қарамастан, жылуөткізгіштік процестерін аналитикалық түрде зерттеу машинажасау, энергетикалық, атомдық, құрылыс және басқа да өнеркәсіп салаларындағы қазіргі заманғы инженерлік зерттеулердің негізгі бөлімдерінің бірі болып табылады. Жұмыста берілген есептің аналитикалық шешімі жылуфизикалық сипаттамаларының кез келген өзгеру заңы үшін профессор А. Н. Төреходжаевтың сызықты емес дифференциалдық теңдеулерді бөліктеп дискретизациялау әдісімен алынған. MathCAD бағдарламасында топырақ үшін графиктер тұрғызылған.

Summary

In this article non-uniform nonlinear equation of heat conductivity with variables of physical heat characteristics under boundary conditions of the first sort are considered. Despite the big development and potential possibilities of numerical methods in solution of thermal problems, the analytical study of heat conductivity processes are still one of the basic issues of modern engineering research. In the work given the analytical decision of this problem was achieved by a method of partial digitization of nonlinear differential equations of professor A. N. Tyurehodzhaev for any change of physical heat characteristics. The graph for the frozen ground was constructed on MathCAD program.

УДК 517.958

КазНТУ им. К. И. Сатпаева,
г. Алматы

Поступила 13.10.10г.