УДК 531.31; 519.21

М. И. ТЛЕУБЕРГЕНОВ

О РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ЗАМЫКАНИЯ МЕТОДОМ КВАЗИОБРАЩЕНИЯ

Рассматривается одна из обратных задач динамики - задача замыкания в классе стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито по заданным свойствам движения, не зависящим от скоростей. Получены необходимые и достаточные условия существования заданного интегрального многообразия достроенной системы стохастических дифференциальных уравнений. Отдельно исследуются общий линейный и скалярный нелинейный случаи поставленной задачи.

В работе Еругина [1] строится множество обыкновенных дифференциальных уравнений, которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа, впоследствии, оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) [2,3 и др.]. Следует отметить, что один из общих методов решения обратных задач динамики в классе ОДУ предложен в работе [3].

1. Постановка задачи. Пусть задано стохастическое дифференциальное уравнение второго порядка типа Ито

$$\ddot{x} = f_1(x,\dot{x},u,\dot{u},t) + \sigma_1(x,\dot{x},u,\dot{u},t)\dot{\xi}\ ,$$

$$x \in R^n,\ \xi \in R^k, \tag{1.1}$$

где σ_1 - матрица размерности $(n \times k)$, а $\{\xi_1(t,\omega),...,\xi_k(t,\omega)\}$ - система независимых винеровских процессов [4], заданная на некотором вероят-ностном пространстве (Ω, U, P).

Требуется достроить замыкающие уравнения (например, описывающие вспомогательные устройства)

$$\ddot{u} = f_2(x,\dot{x},u,\dot{u},t) +$$

$$\ddot{u} = f_2(x,\dot{x},u,\dot{u},t) + \sigma_2(x,\dot{x},u,\dot{u},t)\dot{\xi},$$

$$u \in R^r \tag{1.2}$$

по заданным частным интегралам

$$\Lambda(t) : \lambda(x,u,t) = 0,$$

где $\lambda \in R^m,\ \lambda = \lambda(x,u,t) \in C^{222}_{xut}$ (1.3)

Иначе говоря, по заданным f_1, σ_1 и λ требуется определить вектор-функцию f_2 и матрицу σ_2 так, чтобы множество (1.3) было интегральным для совместной системы уравнений (1.1), (1.2).

Предполагается, что вектор-функции $f_1(x,\dot{x},u,\dot{u},t), f_2(x,\dot{x},u,\dot{u},t)$ и матрицы $\sigma_1(x,\dot{x},u,\dot{u},t), \sigma_2(x,\dot{x},u,\dot{u},t)$ непрерывны по t и липшицевы по $x, u,\ \dot{x}, \dot{u}$ в области

$$U_H(\Lambda) = \{z = (x^T, \dot{x}^T, u^T, \dot{u}^T)^T :$$

$$: \rho(z, \Lambda(t)) < H, H > 0\}, \tag{1.4}$$

что обеспечивает в (1.4) существование и единственность до стохастической эквивалентности решения $z(t)$ системы уравнений (1.1), (1.2) с начальным условием $z(t_0) = z_0$, являющегося непрерывным с вероятностью 1 строго марковским процессом [4].

Указанная задача в случае отсутствия случайных возмущений ($\sigma_1 \equiv 0$, $\sigma_2 \equiv 0$) достаточно полно исследована в работах [2,3], а случай, когда $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$ и с заданными свойствами

вида $\Lambda(t): \lambda(x,\dot{x},u,\dot{u},t)=0$,

$$\lambda \in R^m, \lambda=\lambda(x,\dot{x},u,\dot{u},t) \in C^{12121}_{x\dot{x}u\dot{u}t}$$

рассмотрен в [5].

Для решения поставленной задачи по правилу стохастического дифференцирования Ито [5, с.204] составляется уравнение возмущенного движения

$$\ddot{\lambda}=\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial x}\dot{x}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial u}\dot{u}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial t}+\dot{u}^T\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial u}+\dot{x}^T\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial x}\right)\dot{x}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\partial t}+\dot{x}^T\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\partial x}+\dot{u}^T\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\partial u}\right)\dot{u}+$$

$$+\frac{\partial\lambda}{\partial x}\left(f_1+\sigma_1\dot{\xi}\right)+\frac{\partial\lambda}{\partial u}\left(f_2+\sigma_2\dot{\xi}\right) \qquad (1.5)$$

Введем произвольные функции Н.П. Еругина [1]: m – мерную вектор-функцию $A(\lambda,\dot{\lambda},x,u,t)$ и $(m\times n)$ – матрицу $B(\lambda,\dot{\lambda},x,u,t)$, обладающие свойством $A(0,0,x,u,t)\equiv 0$, $B(0,0,x,u,t)\equiv 0$, и при этом имеет место

$$\ddot{\lambda}=A(\lambda,\dot{\lambda},x,u,t)+B(\lambda,\dot{\lambda},x,u,t)\dot{\xi}. \qquad (1.6)$$

Отсюда, сравнивая уравнения (1.5) и (1.6) приходим к соотношениям

$$\begin{cases} \frac{\partial\lambda}{\partial u}f_2=A-\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial x}\dot{x}-\frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial u}\dot{u}- \\ -\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial t}+\dot{u}^T\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial u}+\dot{x}^T\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial x}\right)\dot{x}+ \\ -\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\partial t}+\dot{x}^T\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\partial x}+\dot{u}^T\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\partial u}\right)\dot{u}-\frac{\partial\lambda}{\partial u}f_1, \\ \frac{\partial\lambda}{\partial u}\sigma_2=B-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\sigma_1, \end{cases} \qquad (1.7)$$

из которых нужно определить вектор-функцию f_2 и матрицу σ_2.

Для разрешимости поставленной задачи нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1 [3, с. 12]. Совокупность всех решений линейной системы

$$Hv=g,\ H=(h_{\mu k}),$$

$$v=(v_k), g=(g_\mu), \mu=\overline{1,m}, \quad k=\overline{1,n},$$

$$m\le n, \qquad (1.8)$$

где матрица H имеет ранг равный m, определяется выражением

$$v=\alpha v^T+v^\upsilon. \qquad (1.9)$$

Здесь α – скалярная величина,

$$v^T=[HC]=[h_1...h_m c_{m+1}...c_{n-1}]=\begin{vmatrix} e_1 & ... & e_n \\ h_{11} & ... & h_{1n} \\ ... & ... & ... \\ h_{m1} & ... & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & ... & c_{m+1,n} \\ ... & ... & ... \\ c_{n-1,1} & ... & c_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

есть векторное произведение векторов $h_\mu=(h_{\mu k})$ и произвольных векторов $c_\rho=(c_{\rho k})$, $\rho=\overline{m+1,n-1}$; e_k – единичные орты пространства R^n, $v^T=(v_k^T)$.

$$v_k^T=\begin{vmatrix} 0 & ... & 1 & ... & 0 \\ h_{11} & ... & h_{1k} & ... & h_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ h_{m1} & ... & h_{mk} & ... & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & ... & c_{m+1,n} & ... & c_{m+1,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ c_{n-1,1} & ... & c_{n-1,k} & ... & c_{n-1,n} \end{vmatrix}, v^\upsilon=H^+g,$$

$H^+=H^T(HH^T)^{-1}, H^T$ - матрица, транспонированная к H.

Решая систему уравнений (1.7) по формуле (1.9) леммы 1, имеем:

$$\begin{cases} f_2=\alpha_1\left[\frac{\partial\lambda}{\partial u}C\right]+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^+\tilde{A}, \\ \sigma_{2i}=\alpha_2\left[\frac{\partial\lambda}{\partial u}C\right]+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^+\tilde{B}_i, \end{cases} \qquad (1.10)$$

где $\sigma_{2i}=(\sigma_{21i},\sigma_{22i},...,\sigma_{2ni})^T$ – i – ый стол-

бец матрицы $\sigma_2 = (\sigma_{2\nu j})$, $(\nu = \overline{1,n})$, $(j = \overline{1,k})$; $\widetilde{B}_i = (\widetilde{B}_{1i}, \widetilde{B}_{2i}, ..., \widetilde{B}_{ri})^T$ – i– ы й столбец матрицы $\widetilde{B} = (\widetilde{B}_{\mu l})$, $(\mu = \overline{1,r})$, $(l = \overline{1,k})$. А через $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ обозначены соответственно

$$\widetilde{A} = A - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial x}\dot{x} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial u}\dot{u} -$$

$$-\left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial t} + \dot{u}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial u} + \dot{x}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial x}\right)\dot{x} + \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial t} +\right.$$

$$\left. + \dot{x}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial x} + \dot{u}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial u}\right)\dot{u} - \frac{\partial \lambda}{\partial u} f_1, \ \widetilde{B} = B - \frac{\partial \lambda}{\partial x}\sigma_1.$$

Следовательно, справедлива

Теорема 1. *Для того чтобы множество (1.3) при заданной структуре (1.1) было интегральным многообразием системы дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито (1.1), (1.2) необходимо и достаточно, чтобы искомые функции замыкающего уравнения (1.2) имели соответственно вид (1.10).*

2. Линейный случай стохастической задачи замыкания. По заданному линейному по сносу стохастическому дифференциальному уравнению второго порядка типа Ито

$$\ddot{x} = \Phi_1(t)x + \Phi_2(t)\dot{x} + \Phi_3(t)u +$$

$$+ \Phi_4(t)\dot{u} + \varphi(t) + T_1\dot{\xi} \qquad (2.1)$$

требуется достроить линейное по сносу замыкающее стохастическое уравнение

$$\ddot{u} = \Psi_1(t)x + \Psi_2(t)\dot{x} + \Psi_3(t)u +$$

$$+ \Psi_4(t)\dot{u} + \psi(t) + T_2\dot{\xi} \qquad (2.2)$$

так, чтобы заданное линейное множество

$$\Lambda(t): \lambda \equiv G_1(t)x + G_2(t)u + l(t) = 0,$$

$$\lambda \in R^m, x \in R^n, u \in R^r \qquad (2.3)$$

было интегральным для системы уравнений (2.1), (2.2).

Иначе говоря, по заданным $G_1(t), G_2(t)$, $\Phi_1(t), \Phi_2(t)$, $\Phi_3(t), \Phi_4(t)$, $T_1(t)$, $T_2(t)$ и заданным вектор-функциям $\varphi(t), l(t)$ требуется определить $(r \times n)$- матрицы $\Psi_1(t), \Psi_2(t)$, $(r \times r)$- матрицы $\Psi_3(t), \Psi_4(t)$ и r-мерную вектор-функцию $\psi(t)$, а также $(r \times k)$ - матрицу $T_2(t)$ так, чтобы обеспечить для системы (2.1), (2.2) интегральность свойств движения (2.3).

В рассматриваемой задаче уравнение возмущенного движения имеет вид:

$$\ddot{\lambda} = \ddot{G}_1 x + 2\dot{G}_1\dot{x} + G_1\left(\Phi_1 x + \Phi_2\dot{x} + \Phi_3 u +\right.$$

$$\left. + \Phi_4\dot{u} + \varphi(t) + T_1\dot{\xi}\right) +$$

$$+ G_2\left(\Psi_1 x + \Psi_2\dot{x} + \Psi_3 u + \Psi_4\dot{u} + \psi(t) + T_2\dot{\xi}\right) +$$

$$+ 2\dot{G}_2\dot{u} + \ddot{l}(t) + \ddot{G}_2 u, \qquad (2.4)$$

а, с другой стороны, уравнение возмущенного движения с помощью произвольных функций Н.П. Еругина [1] – вектор-функций $A_1 = A_1(t), A_2 = A_2(t)$ и $(m \times k)$- матрицы-функции $B(\lambda, \dot{\lambda}, x, u, t)$ со свойством $B(0,0,x,u,t) \equiv 0$, имеет вид

$$\ddot{\lambda} = A_1\lambda + A_2\dot{\lambda} + B(\lambda, \dot{\lambda}, x, u, t)\dot{\xi}. \qquad (2.5)$$

Тогда из уравнений (2.4) и (2.5) с учетом того, что

$$A_1\lambda = A_1\left(G_1(t)x + G_2(t)u + l(t)\right),$$

$$A_2\dot{\lambda} = A_2\left(\dot{G}_1(t)x + G_1(t)\dot{x} + \dot{G}_2(t)u + G_2\dot{u} + \dot{l}(t)\right) \qquad (2.6)$$

следуют соотношения

$$\begin{cases} \ddot{G}_1 x + 2\dot{G}_1\dot{x} + G_1\left(\Phi_1 x + \Phi_2\dot{x} + \Phi_3 u + \Phi_4\dot{u} + \varphi(t)\right) + \\ + 2\dot{G}_2\dot{u} + \ddot{l}(t) + \ddot{G}_2 u \\ + G_2\left(\Psi_1 x + \Psi_2\dot{x} + \Psi_3 u + \Psi_4\dot{u} + \psi(t)\right) = \\ = A_1\left[G_1(t)x + G_2(t)u + l(t)\right] + \\ + A_2\left[\dot{G}_1(t)x + G_1(t)\dot{x} + \dot{G}_2(t)u + G_2(t)\dot{u} + \dot{l}(t)\right], \\ G_1T_1 + G_2T_2 = B, \end{cases}$$

которые преобразуются к виду

$$G_2\Psi_1 = A_1G_1 + A_2\dot{G}_1 - \ddot{G}_1 - G_1\Phi_1 \equiv N_1,$$

$$G_2\Psi_2 = A_2G_1 - 2\dot{G}_1 - G_1\Phi_2 \equiv N_2,$$

$$G_2\Psi_3 = A_1G_2 + A_2\dot{G}_2 - G_1\Phi_3 - \ddot{G}_2 \equiv N_3,$$

$$G_2\Psi_4 = A_2G_2 - 2\dot{G}_2 - G_1\Phi_4 \equiv N_4, \qquad (2.7)$$

$$G_2\Psi_4 = A_2G_2 - 2\dot{G}_2 - G_1\Phi_4 \equiv N_4,$$

$$G_2T_2 = B - G_1T_1.$$

На основании формулы (1.9) леммы 1 совокупность всех решений системы уравнений (2.7) определяется в виде

$$\begin{cases} \psi(t) = \alpha_1[G_2C] + (G_2)^+ L(t), \\ \Psi_{1i} = \alpha_2[G_2C] + (G_2)^+ N_{1i}, \\ \Psi_{2i} = \alpha_3[G_2C] + (G_2)^+ N_{2i}, \\ \Psi_{3i} = \alpha_4[G_2C] + (G_2)^+ N_{3i}, \\ \Psi_{4i} = \alpha_5[G_2C] + (G_2)^+ N_{4i}, \\ T_{2i} = \alpha_6[G_2C] + (G_2)^+ N_{5i}, \end{cases} \tag{2.8}$$

где через $\Psi_{1i}, \Psi_{2i}, \Psi_{3i}, \Psi_{4i}, T_{2i}, N_{1i}, N_{2i}, N_{3i}, N_{4i}, N_{5i}$ обозначены соответственно i – ые столбцы матриц $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, N_1,\ N_2, N_3, N_4, N_5, T_2$, а

$$N_1 = A_1G_1 + A_2\dot{G}_1 - \ddot{G}_1 - G_1\Phi_1,$$

$$N_2 = A_2G_1 - 2\dot{G}_1 - G_1\Phi_2,$$

$$N_3 = A_1G_2 + A_2\dot{G}_2 - G_1\Phi_3 - \ddot{G}_2,$$

$$N_3 = A_1G_2 + A_2\dot{G}_2 - G_1\Phi_3 - \ddot{G}_2,$$

$$L(t) = A_1l(t) + , + A_2\dot{l}(t) - G_1\varphi(t) - \ddot{l}(t),$$

$$N_5 = B - G_1T.$$

Теорема 2. Для того чтобы множество (2.3) при заданной структуре (2.1) было интегральным многообразием системы дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито (2.1), (2.2) необходимо и достаточно, чтобы искомые функции замыкающего уравнения (2.2) имели соответственно вид (2.8).

3. Скалярный нелинейный случай стохастической задачи замыкания $x \in R^1, u \in R^1$. Пусть по заданному множеству

$$\Lambda(t): \eta(x,u,t) = 0,\ \eta \in R^1 \tag{3.1}$$

и скалярному стохастическому уравнению

$$\ddot{x} = v_1(x,\dot{x},u,\dot{u},t) + \gamma_1(x,\dot{x},u,\dot{u},t)\dot{\xi} \tag{3.2}$$

требуется построить замыкающее стохастическое уравнение

$$\ddot{u} = v_2(x,\dot{x},u,\dot{u},t) + \gamma_2(x,\dot{x},u,\dot{u},t)\dot{\xi} \tag{3.3}$$

так, чтобы совместная система уравнений (3.2), (3.3) имела интегральное многообразие вида (3.1), т.е. обратная стохастическая задача замыкания в данной постановке заключается в определении $v_2(x,\dot{x},u,\dot{u},t)$ и $\gamma_2(x,\dot{x},u,\dot{u},t)$ по заданным функциям $\eta = \eta(x,\dot{x},u,\dot{u},t)$, $v_1 = v_1(x,\dot{x},u,\dot{u},t)$ и $\gamma_1 = \gamma_1(x,\dot{x},u,\dot{u},t)$, обеспечивающих системе (3.2), (3.3) интегральность множества $\Lambda(t)$ (3.1).

По правилу стохастического дифференцирования Ито [4] составим уравнение возмущенного движения относительно множества $\Lambda(t)$:

$$\ddot{\eta} = \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + \left[\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial u}\dot{u} + \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\dot{x}\right]\dot{x} +$$

$$+ \frac{\partial\eta}{\partial x}\left[v_1 + \gamma_1\dot{\xi}\right] +$$

$$+ \left[\frac{\partial^2\eta}{\partial u\partial t} + \frac{\partial^2\eta}{\partial u\partial x}\dot{x} + \frac{\partial^2\eta}{\partial u^2}\dot{u}\right]\dot{u} +$$

$$+ \frac{\partial\eta}{\partial u}\left[v_2 + \gamma_2\dot{\xi}\right] + \frac{\partial^2\eta}{\partial t\partial x}\dot{x} + \frac{\partial^2\eta}{\partial t\partial u}\dot{u} \tag{3.4}$$

Далее, следуя методу Н.П. Еругина [1], введем функции $a = a(\eta,\dot{\eta},x,u,t)$ и $b = b(\eta,\dot{\eta},x,u,t)$ такие, что $a(0,0,x,u,t) \equiv$ $\equiv b(0,0,x,u,t) \equiv 0$ и имеет место следующее равенство:

$$\ddot{\eta} = a + b\dot{\xi}. \tag{3.5}$$

Из уравнений (3.4), (3.5) следуют соотношения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\eta}{\partial u}v_2 = a - \dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - 2\dot{x}\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x\partial t} - 2\dot{x}\dot{u}\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x\partial u} - \\ - 2\dot{u}\dfrac{\partial^2\eta}{\partial u\partial t} - \dfrac{\partial^2\eta}{\partial x}\dot{x}^2 - \dfrac{\partial^2\eta}{\partial u^2}\dot{u}^2 - \dfrac{\partial\eta}{\partial x}v_1, \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial u}\gamma_2 = b - \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\gamma_1. \end{cases} \tag{3.6}$$

Отсюда из (3.6) в предположении, что выполняется условие $\dfrac{\partial\eta}{\partial u} \neq 0$, искомые функции v_2

и γ_2, обеспечивающие интегральность свойств (3.1), определятся в виде

$$\begin{cases} \nu_2 = (\frac{\partial\eta}{\partial u})^{-1}(a - \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - 2\dot{x}\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial t} - 2\dot{x}\dot{u}\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial u} - \\ -2\dot{u}\frac{\partial^2\eta}{\partial u\partial t} - \frac{\partial^2\eta}{\partial x}\dot{x}^2 - \frac{\partial^2\eta}{\partial u^2}\dot{u}^2 - \frac{\partial\eta}{\partial x}\nu_1), \\ \gamma_2 = (\frac{\partial\eta}{\partial u})^{-1}(b - \frac{\partial\eta}{\partial x}\gamma_1). \end{cases}$$

Заключение. Таким образом, методом квазиобращения в общей нелинейной, линейной и скалярной нелинейной постановках решена стохастическая задача замыкания в предположении, что заданные свойства не зависят от скоростей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Еругин Н.П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую //ПММ. 1952. Т.10. В.16. С.659-670.

2. *Галиуллин А.С.* Методы решения обратных задач динамики. М.,1986. 224с.

3. *Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г.* Уравнения программных движений. М.,1986. 88с.

4. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990. 632 с.

5. *Тлеубергенов М.И.* Об обратной стохастической задаче замыкания //Доклады МН-АН РК, 1999. № 1. С.53-60.

Резюме

Жылдамдықтардан тәуелсіз берілген қасиеттері бойынша Ито типтес екінші ретті стохастикалық дифференциалды теңдеулер класында динамиканың кері есептерінің бірі - тұйықталу есебі қарастырылады. Стохастикалық дифференциалдық теңдеулердің құрылған жүйесінің берілген интегралды көпбейнесінің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары алынған. Қойылған есептің жалпы сызықты және скаляр сызықсыз жағдайлары бөлек зерттеледі.

Summary

One of the inverse problems of dynamics - the closure's problem by given properties of motion, no depending from velocities, into the class of stochastic differential Ito's equations of second order is considered. The necessary and sufficient conditions of the existence of given integral manifold of constructed system of stochastic equations are received. The general linear and scalar nonlinear cases of posed problem are separately investigated.

Институт математики
МОН РК, г. Алматы

Поступила 02.09.2008 г.