УДК531.31;519.21

М. И. ТЛЕУБЕРГЕНОВ, Д. Т. АЖЫМБАЕВ

О ПОСТРОЕНИИ МНОЖЕСТВА СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ЗАДАННЫМ СВОЙСТВАМ ДВИЖЕНИЯ, НЕ ЗАВИСЯЩИМ ОТ СКОРОСТЕЙ

Строятся уравнения Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа по заданным свойствам движения при наличии случайных возмущений. При этом предполагается, что случайные возмущающие силы – из класса винеровских процессов, а заданные свойства движения не зависят от скоростей. Полученные результаты иллюстрируются на примере движения искусственного спутника Земли под действием сил тяготения и аэродинамических сил.

Постановка задачи. По заданному множеству

$$\Lambda(t): \lambda(x,t) = 0, \ \lambda \in R^m, \qquad x \in R^n \qquad (1)$$

требуется построить стохастические уравнения лагранжевой, гамиль-тоновой и биркгофиановой структуры

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\nu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} = \sigma'_{\nu j}(x,\dot{x},t)\dot{\xi}^j,$$
$$\left(\nu = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,r}\right), \qquad (2)$$

$$\begin{cases} \dot{q}_k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k}, \\ \dot{p}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q_k} + \sigma'_{kj}(q,p,t)\dot{\xi}^j; \qquad \left(k = \overline{1,n}\right) \end{cases} \qquad (3)$$

$$\left[\frac{\partial R_i(z,t)}{\partial z_l} - \frac{\partial R_l(z,t)}{\partial z_i}\right]\dot{z}_i - \left[\frac{\partial B(z,t)}{\partial z_l} + \frac{\partial R_l(z,t)}{\partial t}\right] =$$
$$= T_{l\mu}\dot{\psi}_\mu \ (i,l = \overline{1,2n}, \ \mu = \overline{1,n+r}) \qquad (4)$$

так, чтобы множество $\Lambda(t)$ было интегральным многообразием построенных уравнений. Здесь $B = B(z,t)$ – функция Биркгофа, а $W = (W_{il})$ – тензор Биркгофа с компонентами $W_{il} = \left[\dfrac{\partial R_i(z,t)}{\partial z_l} - \dfrac{\partial R_l(z,t)}{\partial z_i}\right]$.

Поставленная задача в классе обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривалась в [1]. В [2] рассмотрены задачи построения по заданному стохастическому уравнению Ито второго порядка, эквивалентного стохастического уравнения лагранжевой, гамильтоновой и биркгофиановой структуры. В [3] решаются задачи построения функции Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа по заданным свойствам движения (1), зависящих как от обобщенных координат, так и от обобщенных скоростей.

В отличие от [3] в данной работе рассматриваются задачи построения функции Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа по заданным свойствам движения (1), которые не зависят от скоростей.

Для решения поставленных задач на первом этапе по заданному множеству методом квазиобращения [4] в сочетании с методом Еругина [5] и в силу стохастического дифференцирования сложной функции [6] строится уравнение Ито

$$\ddot{x} = f(x,\dot{x},t) + \sigma(x,\dot{x},t)\dot{\xi} \qquad (5).$$

так, чтобы множество $\Lambda(t)$ являлось интегральным многообразием построенного уравнения.

И, далее, по построенному уравнению Ито строятся эквивалентные ему уравнения лагранжевой, гамильтоновой и биркгофиановой структуры.

1. Построение стохастической уравнения лагранжевой структуры (2) по заданным свойствам движения (1). Предварительно, по правилу стохастического дифференцирования Ито составляются уравнения возмущенного движения

$$\ddot{\lambda} = \frac{\partial \lambda}{\partial x}\left(f + \sigma\dot{\xi}\right) + \dot{x}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial x}\dot{x} + 2\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \quad (6)$$

и вводятся произвольные функции Еругина [5] A и B, обладающие свойствами $A(0,0,x,\dot{x},t) \equiv 0$, $B(0,0,x,\dot{x},t) \equiv 0$,

$$\ddot{\lambda} = A(\lambda,\dot{\lambda},x,\dot{x},t) + B(\lambda,\dot{\lambda},x,\dot{x},t)\dot{\xi}. \qquad (7)$$

Сравнивая уравнения (6) и (7), приходим к соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial x} f = A - \dot{x}^{\mathrm{T}} \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial x}\dot{x} - 2\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial t} - \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}, \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial x}\sigma = B; \end{cases} \quad (8)$$

из которых методом квазиобращения [4, с.12] определим вектор-функцию f и матрицу σ

$$f = k\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}C\right] +$$

$$+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^{+}\left(A - \dot{x}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial x}\dot{x} - 2\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial t} - \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}\right), \quad (9)$$

$$\sigma_i = s_i\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^{+} B_i, \ i = \overline{1,r}, \quad (10)$$

где $\sigma_i = (\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, \ldots, \sigma_{ni})^T$ – i-ый столбец матрицы $\sigma = (\sigma_{\nu j})$, $(\nu = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,r})$, $B_i = (B_{1i}, B_{2i}, \ldots, B_{mi})^T$ – i-ый столбец матрицы $B = (B_{\mu j})$, $(\mu = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,r})$, s_i, k – произвольные скалярные величины.

Следовательно, из (9), (10) следует, что множество дифференциальных уравнений Ито второго порядка, обладающее заданной интегральной кривой (1) имеет вид

$$\ddot{x} = k\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^{+} \times$$

$$\times\left(A - \dot{x}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial x}\dot{x} - 2\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial t} - \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}\right) +$$

$$+ (s_i\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^{+} B_i)\dot{\xi}.$$

Далее, по правилу стохастического дифференцирования Ито раскроем выражение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_\nu}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}_\nu\partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}_\nu\partial x_k}\dot{x}_k +$$

$$+\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}_\nu\partial\dot{x}_k}\ddot{x}_k + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 L}{\partial\dot{x}_\nu\partial\dot{x}_i\partial\dot{x}_k}\sigma_{ij}\sigma_{kj}. \quad (11)$$

Следовательно, уравнение (2) с учетом (11) принимает следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_\nu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} - \sigma'_{\nu j}(x,\dot{x},t)\dot{\xi}^j =$$

$$= \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}_\nu\partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}_\nu\partial x_k}\dot{x}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}_\nu\partial\dot{x}_k}\ddot{x}_k +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 L}{\partial\dot{x}_\nu\partial\dot{x}_i\partial\dot{x}_k}\sigma_{ij}\sigma_{kj} - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} - \sigma'_{\nu j}(x,\dot{x},t)\dot{\xi}^j. \quad (12)$$

Или, учитывая (12) и уравнение (5), имеем

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}_\nu\partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}_\nu\partial x_k}\dot{x}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}_\nu\partial\dot{x}_k}\ddot{x}_k +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 L}{\partial\dot{x}_\nu\partial\dot{x}_i\partial\dot{x}_k}\sigma_{ij}\sigma_{kj} - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} - \sigma'_{\nu j}(x,\dot{x},t)\dot{\xi}^j \equiv$$

$$\equiv \ddot{x} - f(x,\dot{x},t) - \sigma(x,\dot{x},t)\dot{\xi}, \quad (13)$$

где

$$f = s_1\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^{+} \times$$

$$\times\left(A - \dot{x}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial x}\dot{x} - 2\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial t} - \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}\right),$$

$$\sigma_i = s_2\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^{+} B_i.$$

Из соотношения (13) следуют равенства

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}_\nu\partial\dot{x}_k} = \delta_\nu^k;$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}_\nu\partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}_\nu\partial x_k}\dot{x}_k + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 L}{\partial\dot{x}_\nu\partial\dot{x}_i\partial\dot{x}_k}\sigma_{ij}\sigma_{kj} - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} = -f,$$

$$\sigma'_{\nu j}(x,\dot{x},t) = \sigma. \quad (14)$$

Рассмотрим теперь задачу косвенного представления уравнения лагранжевой структуры. Для этого введем матрицу h_ν^k и рассмотрим следующее соотношение

$$h_\nu^k\left(\ddot{x}_k - f_k - \sigma_{kj}\dot{\xi}^j\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x_\nu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} - \sigma'_{\nu j}\dot{\xi}^j. \quad (15)$$

Для выполнения тождества (15) требуется выполнение условий

$$h_v^k = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_v \partial \dot{x}_k},$$

$$-h_v^k f_k = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_v \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_v \partial \dot{x}_k}\dot{x}_k + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 L}{\partial \dot{x}_v \partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k}\sigma_{ij}\sigma_{kj} - \frac{\partial L}{\partial t},$$

$$h_v^k \sigma_{kj} = \sigma'_{vj}. \qquad (16)$$

Тем самым доказана

Теорема 1. *Для построения стохастического уравнения лагранжевой структуры (2) по заданному множеству (1) так, чтобы множество (1) было интегральным многообразием построенного уравнения, необходимо и достаточно выполнения условий (16).*

2. Построение стохастического уравнения гамильтоновой структуры (3) по заданным свойствам движения (1). Для построения функции Гамильтона предварительно введем новую переменную $y_k = \dot{x}_k$ и перепишем заданное уравнение (5) в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_k = y_k, \\ \dot{y}_k = f_k(x,y,t) + \sigma_{kj}(x,y,t)\dot{\xi}^j, \end{cases} \qquad (17)$$

где

$$f = (f_1, f_2, ..., f_n)^T = s_1\left[\frac{\partial \lambda}{\partial x}C\right] +$$

$$+\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^+\left(A - \dot{x}^T\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial x}\dot{x} - 2\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}\right),$$

$$\sigma_i = (\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, ..., \sigma_{ni})^T = s_2\left[\frac{\partial \lambda}{\partial x}C\right] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^+ B_i.$$

Затем с помощью замен $z_k = \begin{cases} x_k \\ y_k \end{cases}$; $G_k = \begin{cases} y_k \\ f_k \end{cases}$;

$$\psi_j = \begin{cases} 0, \text{ при } j = \overline{1,n}; \\ \xi^{j-n}, \text{ при } j = n+1, n+2, \ldots, n+m; \end{cases};$$

$\mu = (\mu_{kj}) = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & 0_{n\times m} \\ 0_{n\times n} & \sigma_{n\times m} \end{pmatrix}$; $\sigma = (\sigma_{kj})$ перепишем уравнение (17) в виде

$$\dot{z}_k = G_k(z,t) + \mu_{kj}(z,t)\dot{\psi}_j. \qquad (18)$$

Далее стохастическое уравнение гамильтоновой структуры (3) с помощью замены

$\nu_k = \begin{cases} q_k, & k = \overline{1,n} \\ p_{k-n}, & k = n+1, n+2, \ldots 2n \end{cases}$ и матриц

$$\varphi = (\varphi_{kv}) = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & I_{n\times n} \\ -I_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix},$$

$p = (p_{kj}) = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & 0_{n\times m} \\ 0_{n\times n} & \sigma'_{n\times m} \end{pmatrix}$, а также с учетом того,

что $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ -\dfrac{\partial H}{\partial q_k} \end{pmatrix} = \left(\varphi_{kv}\dfrac{\partial H}{\partial \nu_v}\right)$ перепишем в виде

$$\dot{\nu}_k - \varphi_{kv}\frac{\partial H}{\partial \nu_v} = p_{kj}\dot{\psi}_j \qquad (19)$$

или, если ввести обратную к (φ_{kv}) матрицу

$$(\omega_{kv}) = (\varphi_{kv})^{-1} = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & -I_{n\times n} \\ I_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix}$$

и вектор

$$z_k \equiv \omega_{kv}\nu_v = \begin{pmatrix} -p_k, & k = \overline{1,n} \\ q_{k-n}, & k = \overline{n+1, 2n} \end{pmatrix},$$

то уравнение (19) преобразуется к эквивалентному уравнению

$$\omega_{vk}\dot{z}_k - \frac{\partial H}{\partial z_k} = \omega_{vk}p_{vj}\dot{\psi}_j. \qquad (20)$$

Рассмотрим задачу непрямого представления уравнения (18) в виде уравнения гамильтоновой структуры (20), т.е. с помощью некоторой матрицы $\Gamma = (\gamma_v^k)$ рассмотрим соотношение

$$\gamma_v^k(\dot{z}_k - G_k - \mu_{kj}\dot{\psi}_j) \equiv \omega_{vk}\dot{z}_k - \frac{\partial H}{\partial z_v} - \omega_{vk}p_{vj}\dot{\psi}_j$$

или

$$C_{vk}\dot{z}_k - D_v(z,t) - \gamma_v^k\mu_{kj}\dot{\psi}_j \equiv$$

$$\equiv \omega_{vk}\dot{z}_k - \frac{\partial H}{\partial z_v} - \omega_{vk}p_{vj}\dot{\psi}_j, \qquad (21)$$

где $C_{vk} = \gamma_v^k$; $D_v(z,t) = \gamma_v^k G_k$.

Для выполнения тождества (21) требуется выполнение условий

$$C_{\nu k} = \omega_{\nu k}, \; D_\nu(z,t) = -\frac{\partial H}{\partial z_\nu}, \qquad (22)$$

$$\gamma_\nu^k \mu_{kj} = \omega_{\nu k} p_{\nu j} \quad \left(\nu, k = \overline{1,2n}, \; j = \overline{1,n+m}\right), \qquad (23)$$

$$\gamma_\nu^k = \omega_{\nu k}. \qquad (24)$$

Из соотношений (21) и условий (22)-(24) следует, что $\mu_{kj} = p_{\nu j}$, а это влечет выполнение равенства

$$\sigma_{kj} = \sigma'_{kj}, \; \left(k = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,m}\right).$$

Следовательно, справедлива

Теорема 2. *Для непрямого построения стохастического уравнения гамильтоновой структуры (3) по заданному множеству (1) так, чтобы множество (1) было интегральным многообразием уравнения (20), необходимо и достаточно выполнение условий (22)-(24).*

3. Построение стохастического уравнения биркгофиановой структуры (4) по заданным свойствам движения (1).

Для решения поставленной задачи рассмотрим соотношение

$$C_{\nu k}\dot{z}_k - D_\upsilon(z,t) - \mu_{\nu j}\dot{\psi}_j \equiv$$

$$\equiv \left[\frac{\partial R_k(z,t)}{\partial z_\nu} - \frac{\partial R_\nu(z,t)}{\partial z_\kappa}\right]\dot{z}_\kappa -$$

$$-\left[\frac{\partial B(z,t)}{\partial z_\nu} + \frac{\partial R_\nu(z,t)}{\partial t}\right] - T_{\nu j}\dot{\psi}_j, \qquad (25)$$

$(\nu, \kappa = \overline{1,2n}, \; j = \overline{1,n+m})$, которое выполняется тождественно при следующих условиях:

$$C_{\nu k} = \left[\frac{\partial R_\kappa(z,t)}{\partial z_\upsilon} - \frac{\partial R_\upsilon(z,t)}{\partial z_\kappa}\right],$$

$$D_\nu = \left[\frac{\partial B(z,t)}{\partial z_\upsilon} + \frac{\partial R_\upsilon(z,t)}{\partial t}\right], \; \mu = T. \qquad (26)$$

Следовательно, имеет место

Теорема 3. *Для построения стохастического уравнения биркгофиановой структуры (4) по заданному множеству (1), так чтобы множество (1) было интегральным многообразием уравнения (4), необходимо и достаточно выполнение условий (26).*

Пример.

Рассмотрим построение функций Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа по заданному свойству движения:

$$\Delta(t): \lambda \equiv \alpha_1\theta + \alpha_2 = 0, \qquad \lambda \in R^1.$$

Тогда соотношение (6) имеет вид

$$\dot{\lambda} = \alpha_1\dot{\theta},$$

$$\ddot{\lambda} = \alpha_1\ddot{\theta} = \alpha_1\left(f(\theta,\dot{\theta},t) + \sigma(\theta,\dot{\theta},t)\xi\right). \quad (27)$$

Введем функции Н. П. Еругина

$$a = a_1\lambda + a_2\dot{\lambda} \quad \text{и} \quad b = b_1\lambda + b_2\dot{\lambda},$$

где $a_1 = a_1(\theta,\dot{\theta},t)$, $a_2 = a_2(\theta,\dot{\theta},t)$ $b_1 = b_1(\theta,\dot{\theta},t)$, $b_2 = b_2(\theta,\dot{\theta},t)$ такие, что имеет место соотношение

$$\ddot{\lambda} = a_1\lambda(\theta,\dot{\theta},t) + a_2\dot{\lambda}(\theta,\dot{\theta},t) +$$
$$+\left[b_1\lambda(\theta,\dot{\theta},t) + b_2\dot{\lambda}(\theta,\dot{\theta},t)\right]\xi. \qquad (28)$$

Из соотношений (27), (28) следует, что

$$\begin{cases} f = \dfrac{1}{\alpha_1}\left(a_1\lambda(\theta,\dot{\theta},t) + a_2\dot{\lambda}(\theta,\dot{\theta},t)\right), \\ \sigma = \dfrac{1}{\alpha_1}\left(b_1\lambda(\theta,\dot{\theta},t) + b_2\dot{\lambda}(\theta,\dot{\theta},t)\right). \end{cases} \qquad (29)$$

Тогда уравнение (7) примет вид $\ddot{\theta} = f(\theta,\dot{\theta},t) + \sigma(\theta,\dot{\theta},t)\xi$.

Для построения функции Гамильтона предварительно построим лагранжиан по следующему уравнению [7]

$$\ddot{\theta} = \tilde{f}(\theta,\dot{\theta}) + \tilde{\sigma}(\theta,\dot{\theta})\xi, \qquad (30)$$

где θ – угол тангажа, а функции $\tilde{f}$ и $\tilde{\sigma}$ имеют вид

$$\tilde{f} = Ql\sin 2\theta - Q[g(\theta) + \eta\dot{\theta}],$$

$$\tilde{\sigma} = Q\delta[g(\theta) + \eta\dot{\theta}]. \qquad (31)$$

Из соотношений (29), (31) с учетом того, что $f = \tilde{f}$, $\sigma = \tilde{\sigma}$ имеем

$$\frac{1}{\alpha_1}\left(a_1\lambda(\theta,\dot{\theta},t) + a_2\dot{\lambda}(\theta,\dot{\theta},t)\right) =$$

$$= Ql\sin 2\theta - Q[g(\theta) + \eta\dot{\theta}],$$

$$\frac{1}{\alpha_1}\left(b_1\lambda(\theta,\dot{\theta},t) + b_2\dot{\lambda}(\theta,\dot{\theta},t)\right) = Q\delta[g(\theta) + \eta\dot{\theta}]$$

и приравнивая коэффициенты при $\dot{\theta}$, θ находим Q, η, δ:

$$Q = \frac{a_1}{(2l-g)}, \ \eta = \frac{a_2(2l-g)}{a_1\alpha_1}, \ \delta = \frac{b_2\alpha_1}{a_2}.$$

Тогда по определению из [2] следует, что (30) допускает непрямое аналитическое представление в терминах стохастического уравнения лагранжевой структуры, если существует функция h, такая, что имеет место тождество

$$d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} - \sigma'(\theta,\dot{\theta},t)\dot{\xi} \equiv h[\ddot{\theta} - f - \sigma\dot{\xi}]. \quad (32)$$

Найдем функцию $h = h(t)$ так, чтобы выполнялись необходимые и достаточные условия Гельмгольца [8, с. 107] существования лагранжиана

$$h(t)\frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}} = \dot{h}(t).$$

Этому условию удовлетворяет функция h вида $h = e^{Q\eta t}$. Подставляя найденное h в (32) получим

$$e^{Q\eta t}[\ddot{\theta} - f - \sigma\dot{\xi}] =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^2}\ddot{\theta} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\theta}\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial^2 L}{\partial\theta\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t}\sigma'\dot{\xi}.$$

Таким образом, искомый лагранжиан строится в виде

$$L = e^{Q\eta t}\left[\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - Q\left(\frac{1}{2}l\cos 2\theta + G\right)\right],$$

где

$$G = \int g(\theta)d\theta, \quad (33)$$

который обеспечивает представление (30) в виде уравнения лагранжевой структуры

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = e^{Q\eta t}\sigma(\theta,\dot{\theta})\dot{\xi}. \quad (34)$$

Используя функцию Лагранжа (33) и преобразование Лежандра, определим функцию Гамильтона в виде $H = \chi\dot{\theta} - L(\theta,\dot{\theta},t)\Big|_{\dot{\theta}=\dot{\theta}(\theta,\chi,t)}$. И так как $\chi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$, то $\chi = e^{Q\eta t}\dot{\theta}$ и, следовательно, $\dot{\theta} = e^{-Q\eta t}\chi$. Тогда каноническое уравнение, соответствующее уравнению (34), примет вид

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial \chi};$$

$$\dot{\chi} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} + \hat{\sigma}(\theta,\chi,t)\dot{\xi}, \quad (35)$$

где $\hat{\sigma} = \sigma'(\theta,\dot{\theta},t)\Big|_{\dot{\theta}=\dot{\theta}(\theta,\chi,t)}$, а функция Гамильтона определяется в виде

$$H = \frac{1}{2}e^{-Q\eta t}\chi^2 - e^{Q\eta t}b(\theta), \quad (36)$$

где $b(\theta) = Q(\frac{1}{2}l\cos 2\theta + G)$.

Для разрешения задачи представления биркгофиана по заданному уравнению (30) воспользуемся теоремой 1 [9]. По построенному выше уравнению (35) и функции Гамильтона (36) из соотношений (25) при $C = \begin{pmatrix}\phi & 0\\ 0 & \phi\end{pmatrix}$ функции $R_\upsilon(\upsilon = 1,2)$ и B определяются в следующем виде

$$R_\upsilon = \{\chi, (1+\phi)\theta\}, \qquad B = \frac{1}{2}\phi e^{Q\eta t}\chi^2 - \phi e^{-Q\eta t}b(\theta),$$

где ϕ – произвольная постоянная.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Туладхар Б.М.* Построение уравнений в форме Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа по заданным свойствам движения: Автореф. дис. … к. ф.-м. н. М.: УДН им. П. Лумумбы, 1983. 11 с.

2. *Тлеубергенов М.И.* Обратные задачи стохастических дифференциальных систем: Автореф. дис. … д. ф.-м. н. Алматы, 1999. 33 с.

3. *Тлеубергенов М.И., Ажымбаев Д.Т.* О построении дифференциального уравнения по заданным свойствам движения при наличии случайных возмущений // Изв. НАН РК. Сер. физ-мат. 2007. № 5. С. 15-20.

4. *Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г.* Уравнения программных движений. М., 1986. 88 с.

5. *Еругин Н.П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ППМ. 1952. Т. 10. Вып. 16. С. 659-670.

6. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990. 632 с.

7. *Сагиров П.* Стохастические методы в динамике спутников // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. М., 1974. № 5(147). С. 28-47: 1974. № 6(148). С. 3-38.

8. *Santilli R.M.* Foundations of Theoretical Mechanics. 1. The Inverse Problem in Newtonian Mechanics.Springer-Verlag. New-York, 1978. 266 p.

9. *Тлеубергенов М.И.* Обратные задачи стохастических дифференциальных систем // Математический журнал. 2003. Т. 3. № 1. С. 87-95.

Резюме

Қозғалыстың берілген қасиеттері бойынша Ито типтес стохастикалық дифференциалдық теңдеулердің класында Лагранж, Гамильтон және Биркгоф теңдеулері құрылады. Кездейсоқ түртуші күштер Винер үрдістер класынан алынады және қозғалыстың берілген қасиеттері жылдамдықтардан тәуелсіз деп ұйғарылған. Алынған нәтижелер Жердің жасанды жерсерігінің тартылу күштері және аэродинамика күштері әсерінің нәтижесінде қозғалысының мысалында сипатталады.

Summary

It is built the Lagrange, Hamilton and Birkhoff equations by given properties of movement in the class of stochastic differential Ito equations. The random perturbed forces are assumed from the class of Wiener processes and the given properties are independent on velocities. The received results are illustrated on an example of movement of Earth's satellite under the action of gravitation's and aerodynamics forces.

Институт математики
МОН РК, г. Алматы

Поступила 25.12.08г.