М. А. ТЛЕУБЕРГЕНОВА

БИАСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Обозначим N and R множества всех натуральных и вещественных чисел соответственно, и, пусть $\|\bullet\|$ означает евклидовую норму в пространстве R^n, $n \in N$, и C(X, Y) множество всех непрерывных функций, определенных на множестве X со значениями в множестве Y. Будем обозначать множество всех почти периодических функций AP (R).

Введем следующие дополнительные для систем (1) и (2) условия:

$$(C_1)\ \int_0^\infty \|P(t)\|dt < \infty \quad (C_2)\ \lim_{t\to\infty} X(t)\psi(t) = 0.$$

(C_3) A(-t) = -A(t) для всех $t \in R$. (C_4) B(-t) = B(t) для всех $t \in R$.

Определение 1.1. Функция $f \in C(R, R^n)$ называется биасимптотически почти периодической, если $f(t) =$ g(t) + φ(t) для некоторых функций $g \in AP(R)$ и $\varphi \in C(R, R^n)$ такой, что $\lim_{t\to\pm\infty} \varphi(t) = 0$.

В этой главе мы рассматриваем линейную систему

$$y' = [A(t) + B(t)]y, \tag{1}$$

которая может быть рассмотрена как возмущенная система

$$x' = A(t)x, \tag{2}$$

где $x, y \in R^n$, и $A, B \in C(R, R^n \times^n)$.

Определение 1.2. Гомеоморфизм H между множествами решений $x(t)$ и $y(t)$ называется асимптотической эквивалентностью , если $y(t)$ = H(x(t)) влечет $x(t) - y(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Определение 1.3. Гомеоморфизм H между множествами решений $x(t)$ и $y(t)$ называется биасимптотической эквивалентностью, если $y(t) = H(x(t))$ влечет $x\{t) - y(t) \to 0$ при $t \to \pm\infty$.

Пусть $X(t)$, $X(0) = I$, является фундаментальной матрицей решений системы (2). Положим $y = X(t)u$, и получим из уравнений (1) следующую систему

$$u' = P(t)u, \tag{3}$$

где $P(t) = X^{-1}(t)B(t)X(t)$.

В дальнейшем будем использовать следующие леммы.

Лемма 1.1. Если справедливо условие (C_1), то матричное дифференциальное уравнение

$$\psi' = P(t)(\psi + I) \tag{4}$$

имеет решение ψ(t), которое удовлетворяет условию $\psi(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Доказательство рассмотрено [11].

Лемма 1.2. Если справедливо условие (C_3), тогда $X(-t) = X(t)$ для всех $t \in R$, и если, дополнительно, справедливо условие (C_4), то $P(-t) = -P(t)$ для всех $t \in R$.

Доказательство. Обозначим $Z(t) = X(-t)$.

Тогда $Z'(t) = -X'(-t) = -A(-t)X(-t) = A(t)Z(t)$. Поскольку Z(0) = X(0), то в силу единственности $Z(t) \equiv X(t)$. Теперь имеем, что

$P(-t) = X^{-1}(-t)B(-t)X(-t) = -X^{-1}(t)B(t)X(t) = -P(t)$. Лемма доказана.

Лемма 1.3. Предположим, что справедливы условия (C_1), (C_3), (C_4). Тогда система (4) имеет решение ψ(t), которое удовлетворяет условию ψ(-t) = ψ(t) для всех $t \in R$ и $\psi \to 0$ при $t \to \infty$.

Доказательство. По Лемме 1.1 существует решение ψ (t) уравнения (4), которое определено для $t \geq t^+$ и удовлетворяет ψ (t) $\to$ **0** при $t \to \infty$.

Используя равенство $P(-t) = -P(t)$, мы найдем, что

$$\int_{-\infty}^{-t_1} \|P(s)\|ds = \int_{t_1}^{\infty} \|P(s)\|ds < \varepsilon$$

Определим последовательность $n \times n$ матриц $\{\widetilde{\psi}_k\}$ для $t \in (-\infty, 0]$ следующим образом:

$$\widetilde{\psi}_0(t) = I,\ \widetilde{\psi}_k = \int_{-\infty}^{t} P(s)\widetilde{\psi}_{k-1}(s)ds \text{ для } k = 1, 2, \ldots.$$

Также, как и при доказательстве Леммы 1.1, матрица-функция ψ_(t) = $\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\psi}_k(t)$ удовлетворя

ет $\psi(t) = \int_{-\infty}^{t} P(s)(I + \psi(s))ds$

и, следовательно, является решением системы (4) для $t \le -t_1$.

С другой стороны, поскольку $\psi_0(-t) = \tilde{\psi}_0(t) = I$, мы имеем

$$\psi_1(-t) = -\int_{-t}^{\infty} P(s)\psi_0(s)ds =$$

$$= \int_{t}^{-\infty} P(-s)\psi_0(-s)ds = \int_{-\infty}^{t} P(s)\tilde{\psi}_0(s)ds = \tilde{\psi}_1(t).$$

Методом математической индукции доказывается, что $\psi_k(-t) = \tilde{\psi}_k(t)$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ и для всех $t \le -t_1$. Следовательно, $\psi_+(-t) = \psi_-(t)$ для всех $t \le -t_1$. Продолжив ψ_+ и ψ_- как решения системы (4), можно получить, что

$\psi_+(-t) = \psi_-(t)$ для всех $t \le 0$.

Определим

$$\psi(t) = \begin{cases} \psi_+ & если \quad t \ge 0, \\ \psi_- & если \quad t < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $\psi(t)$ является решением системы (4), удовлетворяющим соотношению $\psi(-t) = \psi(t)$ для всех $t \in R$ и $\psi \to 0$ при $t \to \infty$. Теорема доказана полностью.

Теорема. 1.1. Пусть справедливы условия (C_1), (C_2), (C_3), (C_4). Тогда системы (1) и (2) эквивалентны.

Следствие 1.1. Предположим, что справедливы условия (C_1), (C_2), (C_3), (C_4), и что система (2) имеет k - параметрическое, $(k \le n)$, семейство, ν_1 почти периодических решений. Тогда (1) допускает k - параметрическое семейство биасимптотически почти периодических решений, ν_2, и ν_2 изоморфно ν_1.

Пример 1.1. Рассмотрим систему

$$y' = (A(t) + B(t))y, \qquad (5)$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin \pi t & 0 \\ 0 & \sin \sqrt{5}t \end{pmatrix},$$

$B(t) = \cos t e^{-\alpha|t|} C$ где $\alpha > 0$ вещественное число и $C \in R^{2\times 2}$. Система $x' = A(t)x$ имеет квазипериодическую фундаментальную матрицу решений

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{1-\cos \pi t} & 0 \\ 0 & e^{1-\cos \sqrt{5}t} \end{pmatrix},$$

(Так как π и $\sqrt{5}$ несоизмеримые числа). И, следовательно, любое решение этой системы является квазипериодическим или периодическим.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. -М., Наука, 1967, 472 с.

2. *Дороговцев А.Я.* Математический анализ, Киев, Вища школа, 1985. 528 с.

3. *Левитан Б.М.* Почти периодические функции. -М., Изд-во МГУ, 1978, 204

4. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений, -М.-Л., Гостехиздат, 1949, 550 с.

5. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем, -М., Мир, 1971, 309 с.

6. *Харасахал В.Х.* Почти периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений, Алма-Ата, Наука, 1979, 199 с.

7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, -М. Мир.

8. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений, -М, Мир, 1964.

9. *Якубович В.А.* Об асимптотическом поведении систем дифференциальных уравнений, Математический сборник, Т. 28 (1951) 217-240.

10. *Akhmet M.U., Tleubergenova M.* On asymptotic equivalence of impulsive linear homogeneous differential systems, Математический журнал, 2002, Т. 2, No.2, 15-18.

11. *Akhmet M.U., Tleubergenova M.* and *Zafer A.* Asymptotic equivalence of differential equations and asymptotically almost periodic solutions, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 67 (2007) 1870-1877.