УДК 530.145

С. К. ТЛЕУКЕНОВ, Т. С. ДОСАНОВ

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В НЕОГРАНИЧЕННОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ РОМБИЧЕСКОЙ СИНГОНИИ КЛАССОВ 222, mm2, mmm С ПЬЕЗОМАГНИТНЫМ ЭФФЕКТОМ

Исследуются закономерности распространения пьезомагнитных волн в анизотропной среде ромбической сингонии. В статье на основе метода разделения переменных, уравнения движения анизотропной пьезомагнитной среды приведены к эквивалентной системе дифференциальных уравнений первого порядка. На основе метода матрицанта построена структура фундаментальных решений этой системы. На основе структуры фундаментальных решений выписаны инвариантные соотношения волновых процессов рассматриваемой задачи.

Введение. При возникновении в некоторых магнитных кристаллах упругих напряжений в них появляется намагниченность [1-3]. Этот эффект называется пьезомагнитным. О его возможности в кристаллах писал еще в своей монографии В. Фойгт. Но экспериментально он был обнаружен только в 1957 г. советским физиком А. С. Боровиком-Романовым [4].

Пьезомагнитные материалы благодаря своим уникальным физико-механическим свойствам находят широкое применение в различных областях науки и техники, в основном в акустике, вычислительной технике, радиоэлектронике и управляющих системах: например, в пьезорезонаторах, пьезотрансформаторах, пьезомагнитных преобразователях для возбуждения и приема акустических волн [5-7].

При исследовании волновых явлений в кристаллах, обладающих пьезоэффектом, к которым, в частности, относятся пьезомагнитные кристаллы, приходится учитывать взаимодействие волн различной физической природы, что приводит к резкому возрастанию количества физико-механических параметров с одной стороны, и, появлению новых физических эффектов с другой. Уравнения волновых процессов для таких сред очень громоздки, что приводит к серьезным трудностям при их анализе и построении либо приближенных, либо точных аналитических решений. Численное решение этих уравнений также затруднительно, так как при этом встает вопрос о точности и, главное, об устойчивости полученного решения.

Существующие аналитические методы исследования волновых процессов применяются в основном для изотропных сред и сред с высокой симметрией. В случае анизотропной среды эти методы либо не приводят к необходимым количественным и качественным результатам, либо полученные на их основе решения практически необозримы и малопригодны.

В данной работе на основе аналитического метода матриканта [8] исследуется вопрос распространения связанных упругих и электромагнитных волн в одномерно-неоднородной анизотропной пьезомагнитной среде.

Определяющие соотношения для пьезомагнитных кристаллов выводятся непосредственно из термодинамических потенциалов. Пьезомагнитные постоянные связывают симметричные тензоры второго ранга (напряжения или деформации) с векторами магнитного поля, поэтому они являются тензорами третьего ранга. Упругие постоянные связывают два симметричных тензора второго ранга, и поэтому они являются тензорами четвертого ранга. Диэлектрические постоянные связывают два вектора, и поэтому они являются тензорами второго ранга. Определяющие соотношения для пьезомагнитного кристалла имеют вид [1-3]:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} - Q_{ijk}H_k \tag{1}$$

$$B_i = \mu_{ij}H_j + Q_{ijk}\varepsilon_{ij} \tag{2}$$

$$D_i = э_{ij}E_j \tag{3}$$

Линейная часть тензора деформации, как известно, имеет вид

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{l,k} + u_{k,l}) \tag{4}$$

c_{ijkl} – тензор упругости; Q_{ijk} – тензор пьезомагнитных коэффициентов; $э_{ij}$, μ_{ij} – тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости; E_i и D_i – компоненты векторов напряженности и индукции электрического поля; H_i и B_i – компоненты векторов напряженности и индукции магнитного поля.

Полная система уравнений, описывающая упругие и электромагнитные процессы в пьезомагнитном кристалле в отсутствие внешних токов и зарядов, состоит из уравнений движения упругой среды и уравнений Максвелла:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{5}$$

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{6}$$

где σ_{ij} – тензор напряжения, ρ – плотность среды; $\vec{u}$ – вектор смещения.

Компоненты σ_{ij}, B_i и D_i определены формулами (1) – (3). Поскольку в уравнение движения сплошной среды (5) входят теперь магнитные поля, а в (6) компоненты тензора деформации, то система уравнений (5) – (6) с учетом определяющих соотношений пьезомагнитного кристалла описывает связанные упругие и электромагнитные волны в пьезомагнитных кристаллах. Связь упругих и электромагнитных процессов определяется пьезомагнитными модулями кристалла.

I. Анализ вышеприведенной системы уравнений в случае гармонических волн, проводится на основе метода разделения переменных и представления решения в виде:

$$f(x,y,z,t) = f(z)\exp(i\omega t - imx - iny) \tag{7}$$

где m и n – компоненты волнового вектора.

На основе представления (7), система уравнений (1) – (6) приводится к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\vec{w}}{dz} = \hat{B}\vec{w}\,. \tag{8}$$

Здесь $\vec{w} = (u_z, \sigma_{zz}, u_x, \sigma_{xz}, E_y, H_x, u_y, \sigma_{yz}, H_y, E_x)^t$ – вектор столбец, содержащий независимые характеристики упругого и электромагнитного полей; $B = B[c_{ijkl}(z), Q_{ijk}(z), \mu_{ij}(z), э_{ij}(z), \rho(z), \omega, m, n]$ – матрица коэффициентов, элементы которой содержат в себе физико-механические параметры среды и частоту пьезомагнитных волн.

Получен явный вид дифференциальных уравнений первого порядка (11) и определена структура матрицы коэффициентов $\hat{B}$ для кристаллов ромбической сингонии классов 222, mm2, mmm.

Для сред ромбической сингонии классов 222, mm2, mmm, оси декартовых координат параллельны нормалям к плоскостям симметрии, поэтому тензор упругости характеризуется 9 различными модулями упругости. При наличии пьезомагнитного эффекта в такой среде, тензор пьезомагнитных коэффициентов имеет 3 различных коэффициента. Тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости характеризуются 3 различными элементами [1-3].

$$c_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}; \quad Q_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & Q_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{36} \end{pmatrix};$$

$$\mu_{ij} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{pmatrix}; \quad э_{ij} = \begin{pmatrix} э_{11} & 0 & 0 \\ 0 & э_{22} & 0 \\ 0 & 0 & э_{33} \end{pmatrix}.$$

Матрица коэффициентов $\hat{B}$ системы дифференциальных уравнений первого порядка (8) имеет следующую структуру:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 & b_{17} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & 0 & 0 & b_{28} & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{39} & 0 \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & b_{45} & 0 & b_{47} & 0 & 0 & b_{410} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & b_{58} & b_{59} & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega b_{45} & 0 & b_{65} & 0 & b_{67} & 0 & 0 & b_{610} \\ b_{28} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{\omega}b_{58} & 0 & b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & b_{17} & b_{47} & 0 & \frac{i}{\omega}b_{67} & 0 & b_{87} & 0 & 0 & b_{810} \\ 0 & 0 & i\omega b_{410} & 0 & -b_{610} & 0 & i\omega b_{810} & 0 & 0 & b_{910} \\ 0 & 0 & 0 & i\omega b_{39} & 0 & -b_{59} & 0 & 0 & b_{109} & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $b_{12} = \dfrac{1}{c_{33}}$; $b_{13} = i\dfrac{mc_{13}}{c_{33}}$; $b_{17} = i\dfrac{nc_{23}}{c_{33}}$; $b_{21} = -\rho\omega^2$; $b_{24} = im$; $b_{28} = in$; $b_{34} = \dfrac{1}{c_{55}}$; $b_{39} = \dfrac{Q_{25}}{c_{55}}$;

$$b_{43} = m^2c_{11} + n^2c_{66} - \rho\omega^2 + \frac{(nQ_{36})^2}{\mu_{33}} + \frac{(mc_{13})^2}{c_{33}};\quad b_{45} = im\frac{nQ_{36}}{\omega\mu_{33}};\quad b_{47} = mn\left((c_{12}+c_{66}) + \frac{Q_{36}^2}{\mu_{33}} - \frac{c_{23}c_{13}}{c_{33}}\right);$$

$$b_{410} = -in^2\frac{Q_{36}}{\omega\mu_{33}};\quad b_{56} = \mu_{11} + \frac{n^2}{\omega^2Э_{33}} - \frac{Q_{14}^2}{c_{44}};\quad b_{58} = -\frac{Q_{14}}{c_{44}}i\omega;\quad b_{59} = -i\omega\frac{mn}{\omega^2Э_{33}};\quad b_{63} = -i\omega b_{45};$$

$$b_{65} = i\left(\frac{m^2}{\omega\mu_{33}} - \omega Э_{22}\right);\; b_{67} = \frac{m^2Q_{36}}{\mu_{33}};\; b_{610} = -i\frac{mn}{\omega\mu_{33}};\; b_{71} = b_{28};\; b_{76} = \frac{i}{\omega}b_{58};\; b_{78} = b_{12};\; b_{82} = b_{17};$$

$$b_{83} = b_{47};\; b_{85} = \frac{i}{\omega}b_{67};\; b_{87} = m^2c_{66} + n^2c_{22} - \rho\omega^2 + \frac{(mQ_{36})^2}{\mu_{33}} - \frac{(nc_{23})^2}{c_{33}};\; b_{810} = -in\frac{mQ_{36}}{\omega\mu_{33}};\; b_{93} = i\omega b_{410};$$

$$b_{95} = -b_{610};\; b_{97} = i\omega b_{810};\; b_{910} = i\left(\omega Э_{11} - \frac{n^2}{\omega\mu_{33}}\right);\; b_{104} = i\omega b_{39};\; b_{106} = -b_{59};\; b_{109} = i\omega\left(\mu_{22} - \frac{m^2}{\omega^2Э_{33}} + \frac{Q_{25}^2}{c_{55}}\right).$$

II. Структура матрицы коэффициентов $\hat{B}$ сама по себе является очень наглядной и информативной. По ее структуре легко видеть, какие типы волн связаны между собой и какие элементы определяют их взаимодействие. Из (9) видно, что в объемном случае распространения пьезомагнитных волн в анизотропной среде ромбической сингонии классов 222, mm2, mmm, продольные упругие волны связаны с упругими поперечными волнами x поляризации (элементы b_{13} и b_{24}) и y поляризации (элементы b_{17} и b_{28}), и не связаны с электромагнитными волнами, то есть они не порождают пьезомагнитный эффект. Поперечные волны x поляризации связаны с компонентами электромагнитного поля E_y, H_x (элемент b_{45}), а также с компонентами электромагнитного поля H_y, E_x (элементы b_{39} и b_{410}). Поперечные волны y поляризации связаны с компонентами электромагнитного поля E_y, H_x (элементы b_{58} и b_{67}), а также с компонентами электромагнитного поля H_y, E_x (элемент b_{810}). Электромагнитные волны E_y, H_x связаны с компонентами электромагнитного поля H_y, E_x (элементы b_{59} и b_{610}).

В случае распространения пьезомагнитных волн вдоль оси xz, то есть если y компонента волнового вектора равна нулю (n=0), матрица $\hat{B}$ имеет следующую структуру:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{39} & 0 \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & b_{58} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{65} & 0 & b_{67} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{i}{\omega}b_{58} & 0 & b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{i}{\omega}b_{67} & 0 & b_{87} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{910} \\ 0 & 0 & 0 & i\omega b_{39} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{109} & 0 \end{pmatrix} \qquad (10)$$

Из структуру матрицы $\hat{B}$ видно, что в этом случае упругие поперечные волны у поляризации связаны только с компонентами электромагнитного поля E_y, H_x (элементы b_{58} и b_{67}). Причем, следует отметить, что в этом случае система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (8) разбивается на две системы. Первая состоит из шести, а вторая из четырех уравнений.

III. Матрицант – нормированное решение исходных систем дифференциальных уравнений.

Положим

$$\vec{w} = \hat{T}\vec{w}_0, \tag{11}$$

где $\vec{w}_0$ – произвольный вектор.

Тогда из (8) и (11) получим

$$\frac{d\hat{T}}{dz} = \hat{B}\hat{T}. \tag{12}$$

Построение структуры матрицанта основано на его представлении в форме экспоненциального матричного ряда и строится на основе сравнения этих рядов:

$$\hat{T} = \hat{E} + \int_0^z \hat{B}(z_1)dz_1 + \int_0^z\int_0^{z_1} \hat{B}(z_1)\hat{B}(z_2)dz_1dz_2 + \ldots \tag{13}$$

и аналогичном представлении T^{-1}

$$\hat{T}^{-1} = \hat{E} - \int_0^z \hat{B}(z_1)dz_1 + \int_0^z\int_0^{z_1} \hat{B}(z_2)\hat{B}(z_1)dz_1dz_2 - \ldots \tag{14}$$

Эти матричные ряды абсолютно и равномерно сходятся на любом конечном интервале [9].

Поэлементное сравнение матричных рядов (13) и (14) приводит к структуре обратного матрицанта. При распространении связанных волн в одномерно-неоднородной анизотропной среде ромбической сингонии классов 222, $mm2$, mmm с пьезомагнитным эффектом структуру обратного матрицанта можно представить в следующем виде:

$$\hat{T}^{-1} = \begin{pmatrix}
t_{22} & -t_{12} & -t_{42} & t_{32} & -\frac{i}{\omega}t_{62} & \frac{i}{\omega}t_{52} & -t_{82} & t_{72} & -\frac{i}{\omega}t_{102} & \frac{i}{\omega}t_{92} \\
-t_{21} & t_{11} & t_{41} & -t_{31} & \frac{i}{\omega}t_{61} & -\frac{i}{\omega}t_{51} & t_{81} & -t_{71} & \frac{i}{\omega}t_{101} & -\frac{i}{\omega}t_{91} \\
-t_{24} & t_{14} & t_{44} & -t_{34} & \frac{i}{\omega}t_{64} & -\frac{i}{\omega}t_{54} & t_{84} & -t_{74} & \frac{i}{\omega}t_{104} & -\frac{i}{\omega}t_{94} \\
t_{23} & -t_{13} & -t_{43} & t_{33} & -\frac{i}{\omega}t_{63} & \frac{i}{\omega}t_{53} & -t_{83} & t_{73} & -\frac{i}{\omega}t_{103} & \frac{i}{\omega}t_{93} \\
i\omega t_{26} & -i\omega t_{16} & -i\omega t_{46} & i\omega t_{36} & t_{66} & -t_{56} & -i\omega t_{86} & i\omega t_{76} & t_{106} & -t_{96} \\
-i\omega t_{25} & i\omega t_{15} & i\omega t_{45} & -i\omega t_{35} & -t_{65} & t_{55} & i\omega t_{85} & -i\omega t_{75} & -t_{105} & t_{95} \\
-t_{28} & t_{18} & t_{48} & -t_{38} & \frac{i}{\omega}t_{68} & -\frac{i}{\omega}t_{58} & t_{88} & -t_{78} & \frac{i}{\omega}t_{108} & -\frac{i}{\omega}t_{98} \\
t_{27} & -t_{17} & -t_{47} & t_{37} & -\frac{i}{\omega}t_{67} & \frac{i}{\omega}t_{57} & -t_{87} & t_{77} & -\frac{i}{\omega}t_{107} & \frac{i}{\omega}t_{97} \\
i\omega t_{210} & -i\omega t_{110} & -i\omega t_{410} & i\omega t_{310} & t_{610} & -t_{510} & -i\omega t_{810} & i\omega t_{710} & i\omega t_{1010} & -i\omega t_{910} \\
-i\omega t_{29} & i\omega t_{19} & i\omega t_{49} & -i\omega t_{39} & -t_{69} & t_{59} & i\omega t_{89} & -i\omega t_{79} & -t_{109} & t_{99}
\end{pmatrix} \tag{15}$$

где элементы t_{ij} являются элементами матрицы $\hat{T}$. При построении (15) структура $\hat{B}$ принята в виде (9).

Определение. Структура матрицанта есть зависимость между элементами прямого и обратного матрицанта в форме (15), а также зависимость между элементами $\hat{T}$ и $\hat{T}^{-1}$, следующие из тождества.

Структура матрицанта отражает фундаментальные свойства решений системы для неоднородных анизотропных сред.

Тождество

$$\hat{T}\hat{T}^{-1} = \hat{T}^{-1}\hat{T} = \hat{E}$$

определяет все инвариантные соотношения, отражающие законы сохранения для рассматриваемых волновых задач.

$$t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} - t_{13}t_{24} + t_{14}t_{23} + i\omega t_{15}t_{26} - i\omega t_{16}t_{25} - t_{17}t_{28} + t_{18}t_{27} + i\omega t_{19}t_{210} - i\omega t_{110}t_{29} = 1;$$

$$-t_{11}t_{12} + t_{12}t_{11} + t_{13}t_{14} - t_{14}t_{13} - i\omega t_{15}t_{16} + i\omega t_{16}t_{15} + t_{17}t_{18} - t_{18}t_{17} - i\omega t_{19}t_{110} + i\omega t_{110}t_{19} = 1.$$

и т.д.

Заключение. Таким образом, в данной работе на основе аналитического метода матрицанта впервые построена структура фундаментальных решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих распространение связанных упругих и электромагнитных волн в одномерно-неоднородной анизотропной среде ромбической сингонии классов 222, *mm*2, *mmm* с пьезомагнитным эффектом. Полученные инвариантные соотношения позволяют проводить оценку точности численных расчетов при заданной неоднородности пьезомагнитной среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сонин А.С.* Курс макроскопической кристаллофизики: Учеб. пособ.: Для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 256 с.
2. *Вайнштейн Б.К.* Современная кристаллография: в 4-х т. / Редкол.: Вайнштейн Б.К. (гл. ред.) и др. [предисл. Б.К. Вайнштейн]. М.: Наука, 1979. 4 т.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
4. *Боровиков-Романов А.С.* Пьезомагнетизм в антиферромагнитных фторидах кобальта и марганца // ЖЭТФ. 1960. 38. 1088.
5. *Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. М.: Мир, 1966. Т. 1, ч. А. С. 204-326.
6. *Такер Дж., Рэмптон В.* Гиперзвук в физике твердого тела. М.: Мир, 1975. С. 455.
7. Объединенная научная сессия Отделения физических наук РАН и Объединенного физического общества РФ «Акустоэлектроника» // УФН. 2005. Т. 175, № 8. С. 887-895.
8. *Тлеукенов С.К.* Метод матрицанта. Павлодар: НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004. 148 с.
9. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 522 с.

Резюме

Ромбылы сингония анизотроптық ортада пьезомагнитті толқындар таралу заңдылықтарды зерттеуге арналған. Мақалада айнымалы шамаларды бөлу әдісі негізінде анизотропты пьезомагнитті ортаның қозғалыс теңдеулері бірінші ретті дифференциал теңдеулердің эквивалентті жүйесіне келтірілді. Матрицант тәсілі негізінде сол жүйенің фундаменталды шешімінің құрылымы анықталды. Фундаменталды шешімінің құрылымы негізінде бұл мәселенің толқынды процестер үшін инвариантты қатынастары жазылған.

Summary

In operation the legitimacies of distribution piezomagnetic waves in an anisotropic medium trimetric syngony are explored. In paper on the basis of a method of a separation variables equation motion by anisotropic piezomagnetic medium are given in equivalent system differential equations of the first order. On the basis method matricant the structure of the fundamental solutions of this system is constructed. On the basis of structure of the fundamental solutions the invariant relations of undular processes viewed problem are written out.

ПГУ им. С. Торайгырова, г. Павлодар

Поступила 19.09.09г.