УДК 517.9

Ж.А.ТОКИБЕТОВ, С.З. САПАКОВА

О СИЛЬНО СВЯЗАННОЙ СИСТЕМЕ, ИМЕЮЩЕЙ ОДИНАКОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КОРНИ

Данная работа посвящена изучению задачи Дирихле для сильно связанных систем эллиптического типа в единичном круге. В случае иравных характеристических корней система имеет бесконечное множество решений.

Рассмотрим в единичном круге $|z|<1$ систему эллиптического типа

$$AU_{xx}+2BU_{xy}+CU_{yy}=0, \qquad (1)$$

такую, что при вещественных λ $\det(A+2B\lambda+C\lambda^2)\neq 0$; A,B,C - заданные постоянные квадратные матрицы второго порядка, U - искомый вектор с компонентами u,V.

Задача Дирихле для системы (1) заключается в определении регулярного в области $D\equiv\{|z|<1\}$ решения этой системы, непрерывного вплоть до границы $L\equiv\{|z|=1\}$ и удовлетворяющего условию

$$U=f(t) \text{ на } L, \qquad (2)$$

где $f(t)=(f_1(t),\ f_2(t))$ - заданная вектор-функция точки границы.

Если однородная задача (1)-(2) имеет конечное число линейно-независимых решений и для разрешимости неоднородной задачи необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция f удовлетворяла дополнительным условиям, число которых равно числу решений однородной задачи Дирихле, то ее назовем нётеровой [1]. Задача Дирихле будет фредгольмовой, если система сильно эллиптична, но это требование оказалось лишь только достаточным. Есть примеры систем не являющихся сильно эллиптической, но задача Дирихле для них всегда разрешима и единственна [2]. В работах [3], [4] указаны достаточные условия, связанные с так называемыми понятиями сильной и слабой связанности системы. Эти понятия определены через структуру общего представления решения системы (1).

I. Эта работа посвящена изучению задачи Дирихле для сильно связанных систем (1) в общем случае. В [5] найдены критерии сильной связанности системы (1). При выполнении условий сильной связанности эллиптическую систему

$$L_1(\omega)=\frac{\partial^2\omega}{\partial\bar{z}^2}+\delta\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}+\pi\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}=0 \qquad (3)$$

назовем фундаментальной. Здесь $z=x+iy, \bar{z}=x-iy, \omega=u+iV, \sigma=\nu_1+\nu_2, \pi=\nu_1\nu_2$.

При этом условия сильной связанности эквивалентно неравенствам

$|\nu_1|<1, |\nu_2|<1$ или $|\nu_1|>1, |\nu_2|>1$.

Корни характеристического уравнения λ_1 и λ_2 (при $\mathrm{Im}\lambda_1>0$ и $\mathrm{Im}\lambda_2>0$) связаны с ν_1 и ν_2 следующими соотношениями

$$\lambda_1=-i\frac{\nu_1+1}{\nu_1-1}, \lambda_2=-i\frac{\nu_2+1}{\nu_2-1}.$$

При $\lambda_1=\lambda_2$ (т.е. при $\nu_1=\nu_2=\nu$) общее решение фундаментальной системы (3) имеет вид

$$\omega=(\overline{z-\nu\bar{z}})\Phi(z-\nu\bar{z})+F(z-\nu\bar{z}), \qquad (5)$$

а при $\lambda_1\neq\lambda_2$ (следовательно, $\nu_1\neq\nu_2$)

$$\omega=\Phi(z-\nu_1\bar{z})+F(z-\nu_2\bar{z}), \qquad (6)$$

где Φ, F - произвольные голоморфные функции от своих аргументов. Тогда общее решение системы (1) w имеет вид [5]:

$$w=\alpha\omega+\beta\varpi, \qquad (7)$$

α,β - произвольные где комплексные числа такие, что $|\alpha|\neq|\beta|$.

Рассмотрим случай, $\lambda_1=\lambda_2=i$. Тогда при $V=0$ и на основании формулы (5) по методу [6] общее решение системы (1) можно представить через произвольные аналитические функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в виде

$$w(z)=\alpha((|z|^2-1)\varphi(z)+\psi(z))+\beta(\overline{(|z|^2-1)\varphi(z)+\psi(z)}), \qquad (8)$$

где

$$\varphi(z)=\frac{\Phi(z)}{z}, \psi(z)=F(z)+\frac{\Phi(z)}{z}.$$

Приравнивая выражение $w(z)$ в (8) на окружности $L\equiv\{|z|=1\}$ к функции $f=f_1+if_2$, получим

$$\alpha\psi(t)+\beta\overline{\psi(t)}=f(t) \qquad (9)$$

Теперь по методу Н.И. Мусхелишвили [7] голоморфную в данной области и непрерывную вплоть до границы функцию $\psi(z)$ дополним до кусочно-голоморфной функции, определенной на всей плоскости, т.е. дополним искомую в $Д^+$ функцию $\psi(z)$ функцией $\psi_*(z)$, получив

$$\psi_*(z)=\overline{\psi}(\frac{1}{z}) \text{ в } Д^-,$$

затем обозначим кусочно-голоморфную функцию, равную $\psi(z)$ в $Д^+$ и $\psi_*(z)$ в $Д^-$, снова через $\psi(z)$. Определенная таким образом функция $\psi(z)$ обладает свойством

$$\psi_*(t)=\overline{\psi}(\frac{1}{z})=\psi(z), \text{ если } |z|\neq 1. \qquad (10)$$

Очевидно, что она ограничена на бесконечности.

При этих обозначениях граничное условие (9) записывается в виде

$$\alpha\psi^+(t)+\beta\psi^-(t)=f(t) \qquad (11)$$

или это условие еще запишется так

$$\psi^+(t)=A\psi^-(t)+g(t), \qquad (12)$$

где

$$A=-\frac{\beta}{\alpha}=const, \text{ причем } \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\neq 1, \ g(t)=\frac{f(t)}{\alpha}. \qquad (13)$$

Ясно, что

$$\aleph=\mathrm{Ind}A=0. \qquad (14)$$

и исследуем сначала однородную задачу Римана:

$$\psi^+(t)=A\psi^-(t), t\in L. \qquad (15)$$

В силу того, что имеет место (14), то $\ln A$ есть функция однозначная, а $\ln\psi^+(z)$ и $\ln\psi^-(z)$ - аналитические функции. Как известно, окончательный результат не зависит от выбора ветви $\ln A$, следовательно, можно выбрать ветвь для $\ln A$. Прологарифмируя краевое условие (15), получим задачу об отыскании кусочно-аналитическую функцию $\ln\psi(z)$ по заданному на L скачку $\ln A$:

$$\ln\psi^+(t)-\ln\psi^-(t)=\ln A. \qquad (16)$$

Ее решение при условии $\ln\psi^-(\infty)=0$ дается формулой

$$\ln\psi(z)=\frac{\ln A}{2\pi i}\int_L\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Вернемся к неоднородной задаче (12). В случае $A=const$ однородная задача имеет каноническую функцию

$$X^+(z)=A, X^-(z)=1,$$

а отношение краевых значений канонических функции однородной задачи $A=\frac{X^+(z)}{X^-(z)}$, то неоднородная задача приводится к виду

$$\frac{\psi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\psi^-(t)}{X^-(t)} - \frac{f(t)}{\beta}. \qquad (17)$$

Так как функция $\frac{f(t)}{\beta}$ удовлетворяет условию Гельдера, то ее можно представить в виде разности краевых значений аналитической функций:

$$-\frac{f(t)}{\beta} = \chi^+(t) - \chi^-(t),$$

где

$$\chi(z) = \frac{-1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\beta}\frac{d\tau}{\tau - z}. \qquad (18)$$

Тогда краевое условие (17) записывается в виде

$$\frac{\psi^+(t)}{X^+(t)} - \chi^+(t) = \frac{\psi^-(t)}{X^-(t)} - \chi^-(t)$$

и рассуждая аналогично как в [8], получим общее решение неоднородной задачи Римана (12) при условии $\psi^-(\infty) = 1$:

$$\psi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\alpha}\frac{d\tau}{\tau - z}, \text{если}$$

$$z \in Д^+, \psi^-(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\beta(\tau - z)}d\tau, \text{ если } z \in Д^-.$$

Таким образом, всякая сильно связанная система, имеющая равных корней $\lambda_1 = \lambda_2 = i$, имеет бесчисленное множество решений, заданное по формуле

$$w(z) = (|z|^2 - 1)(\alpha\varphi(z) + \beta\overline{\varphi(z)}) + \qquad (19)$$

где $\varphi(z)$ - произвольная аналитическая функция, а α, β - произвольные комплексные числа, такие, что $|\alpha| \neq |\beta|$. Учитывая, что решение краевой задачи Римана равносильно отысканию $\psi^+(z)$ при

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)d\tau}{\alpha(\tau - z)} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)\overline{d\tau}}{\beta(\overline{\tau} - \overline{z})} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)\overline{d\tau}}{\beta\overline{\tau}}, \text{ у с -}$$

ловии $\overline{\psi^+(\frac{1}{\overline{z}})} = \psi^-(z)$.

II. Теперь рассмотрим общий случай $\lambda_1 = \lambda_2$. В этом случае в системе (3)

$$\sigma = 2\nu, \pi = \nu^2,$$

где $\nu = \nu_1 = \nu_2$. Тогда при помощи преобразования переменной [9]

$$z = z_1 e^{i\chi},$$

систему (3) запишем в виде

$$\omega_{\bar{z}_1\bar{z}_1} + 2|\nu|e^{i(\arg\nu - 2\chi)}\omega_{z_1\bar{z}_1} + |\nu|^2 e^{i(2\arg\nu - 4\chi)}\omega_{z_1 z_1} = 0.$$

Если подобрать $\chi = \frac{1}{2}\arg\nu$, то коэффициенты системы будут действительные постоянные. Таким образом, не ограничивая общности, будем считать коэффициентов системы (3) всегда положительными действительными постоянными ($|\nu| = a \neq 1$):

$$\omega_{\bar{z}\bar{z}} + 2a\omega_{z\bar{z}} + a^2\omega_{zz} = 0 \qquad (20)$$

и общее решение этой фундаментальной системы определяется формулой, где

$$\omega = \overline{(z - a\bar{z})}\Phi(z - a\bar{z}) + F(z - a\bar{z}),$$

где $\Phi(\xi), F(\xi)$ - произвольные аналитические функции своих аргументов и $\Phi(0) = 0$, следовательно, общее решение системы (1)

$$w(z) = \alpha\left[(|z - a\bar{z}|^2 - 1)\varphi(z - a\bar{z}) + \psi(z - a\bar{z})\right] + \qquad (21)$$

здесь

$$+\beta\left[(|z - a\bar{z}|^2 - 1)\overline{\varphi(z - a\bar{z})} + \overline{\psi(z - a\bar{z})}\right],$$

$$\varphi(z - a\bar{z}) = \frac{\Phi(z - a\bar{z})}{z - a\bar{z}}, \psi(z - a\bar{z}) =$$

произвольные постоянные.

$$= F(z - a\bar{z}) + \frac{\Phi(z - a\bar{z})}{z - a\bar{z}}, |\alpha| \neq |\beta|$$

При изучении задачи Дирихле в эллипсе без ограничения общности можно рассматривать лишь случай когда уравнение эллипса имеет вид

$$mz^2 + \overline{m}\overline{z}^2 + 2z\overline{z} = n^2, |m| < 1,$$

где n- действительное число.

Если преобразуем переменную z по формуле

$$z = \frac{\xi + a\overline{\xi}}{1 - a^2},$$

то эллипс $|z - a\bar{z}|^2 = 1$ переходит в плоскости ξ в окружность $|\xi|^2 = 1$ и точно повторяя метод решения задачи по пункту I, получим аналогичную формулу вида (19).

Таким образом, задача Дирихле для общей сильно связанной эллиптической системе из двух уравнений второго порядка с постоянными коэф-

фициентами имеющих равных корней всегда имеет бесконечное множество решений и их можно задавать в виде формулы (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа, М: Издательство АН СССР, 1959. 164 с.

2. *Бицадзе А.В.* ДАН СССР. 1965. Т. 164, №6. с. 1218-1221.

3. *Золоторева Е.В.* ДАН СССР. 1962. Т. 145, с. 724-726.

4. *Товмасян Н.Е.* Дифференциальное уравнения. 1966. Т.2, №1, с. 3-23.

5. *Нгуен Тхыа Хоп.* ДАН СССР.1966. Т. 171, №2, с. 292-295.

6. *Токибетов Ж.А.*. Сб. Проблемы современной механики, Алматы, 2006. с. 185-192.

7. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз. М., 1962. 512 с.

8. *Гахов Ф.Д.*«Краевые задачи», М.: Наука, 1977. 640 с.

9. *Токибетов Ж.А.* «Математические заметки» АН СССР. 1972. Т. 12. №3.

Резюме

Күшті байланысқан эллиптикалық типтегі жүйелер үшін бірлік шеңберде Дирихле есебі қарастырылған. Тең характеристикалық түбірлер жағдайында жүйенің шексіз көп шешімдері болады.

Summary

In this work considered Dirichle problem for the strongly connected systems of elliptical type in a single circle. In case of equal characteristic roots the system has infinite set of solutions.

Казахский Национальный университет им. аль-Фараби

Поступила 8.02.2008 г.