С. ТОКТАРБАЙ[1], Э. КЕВЕДО[2], М. АБИШЕВ[1]

ВНУТРЕННЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

[1]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы
[2]Национальный университет Мексики, Мехико

Получено новое точное внутреннее решение уравнений Эйнштейна для гравитирующего шара, заполненного идеальной жидкостью без учета вращения.

Введение. В рамках общей теории относительности гравитационное поле описывается метрическим тензором $g_{\mu\nu}$, который удовлетворяет уравнению Эйнштейна[1]:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\chi T^{\mu\nu}, \quad \mu,\nu = 0,1,2,3, \tag{1}$$

где $R^{\mu\nu}$ – тензор Риччи; R – скаляр кривизны; $T^{\mu\nu}$ – тензор распределения энергии-импульса системы, а постоянная χ связана с гравитационной постоянной Ньютона.

В случае компактных объектов, которые отличаются тем, что их размер мал по отношению к массе, нам необходимо решить два вида уравнений:

В первом случае $T^{\mu\nu} = 0$ – это уравнение для вакуума, его решение находится с помощью следующих уравнений Эйнштейна:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 0 \tag{2}$$

Внутри тела тензор энергии-импульса не равняется нулю, и поэтому нужно решить уравнение в общем виде. Для этого тензор нужно задать в частном виде. В случае компактных объектов тензор энергии-импульса рассматривается как идеальная жидкость, которая имеет вид:

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p) u^{\alpha} u^{\beta} + p g^{\alpha\beta}, \tag{3}$$

где ρ – плотность энергии; p – давление тела, а u^{β} 4-скороста наблудаеля находящейся внутри тела.

В 1917 году К.Шварцшильд получил одно из наиболее важных решений для уравнений Эйнштейна. Это решение, которое обладает сферической симметрией, имеет следующий вид [2, 3]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} - r^2 \left(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2\right), \tag{4}$$

где M – масса тела в геометрических единицах, т.е. когда $G = c = \hbar = 1$.

Мы говорим о том, что последнее решение (4) описывает внешнее гравитационное поле черный дыры, когда M мало по сравнению с радиусом горизонта. Если же поверхность тела больше, чем радиус горизонта, тогда мы считаем, что это решение описывает внешнее поле сферически-симметричного статического объекта. Это метрика по-прежнему является решением в вакууме, т.е. тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu}$ равняется нулю.

Если же смотреть на решение во внутреннем поле, тогда можно доказать, что оно записывается в таком виде:

$$ds^2 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{2M}{R}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{2Mr^2}{R^3}}\right)^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{2M}{R^3}r^2} - r^2\left(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2\right), \quad (5)$$

где R – радиус сферы а $M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$. Для тензора энергии-импульса мы рассматриваем тот частный случай, когда плотность ρ постоянна. Однако этот случай довольно простой, так как компактные объекты в общем виде не имеют постоянной плотности.

Целью данной работы является построение более физического решения. Для этого предположим, что плотность компактного объекта не постоянна, а зависит от радиальной координаты r.

Настоящая работа состоит из трех разделов. В первом разделе рассмотрено уравнение Эйнштейна с плотностью, зависящей от радиальной координаты r. Во втором разделе мы найдем частное решение уравнения Эйнштейна для внутренних частей компактного объекта. Мы докажем, что можно найти интервал значения постоянных коэффициентов и представить решение в виде графика, который описывает давление. Давление, в свою очередь, имеет физическую интерпретацию в том смысле, что оно постоянно в центре тела и равняется нулю на поверхности, и, что самое главное, нигде не имеет сингулярности. В заключении, обсуждены наши результаты и предложены другие задачи, которые могут обобщить полученные результаты.

Внутреннее уравнение Эйнштейна. Чтобы изучать уравнение Эйнштейна в случае идеальной жидкости, начнем с изучения вида линейного элемента в сферических координатах.

Можно написать линейный элемент в следующем виде [3,4]:

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1-\frac{2m(r)}{r}\right)} + r^2\left(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2\right), \quad (6)$$

где $\Phi = \Phi(r)$, $m = m(r)$ – функции зависящие только от r.

Следовательно, в уравнении (6) только две функции, которые нужно определить с помощью уравнения Эйнштейна. Если написать их в общем виде, получим выражение для градиента потенциала $\Phi(r)$ в виде [4]:

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 p}{r(r-2m(r))}, \quad (7)$$

а функция массы определяется интегралом

$$m(r) = 4\pi\rho(r)r^2. \quad (8)$$

Кроме этого следует иметь в виду закон сохранения энергии. Для идеальной жидкости уравнения принимают особенно простой вид, т.е. $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, и в этом случае записываются в виде градиента давления

$$\frac{dp}{dr} = \frac{(p+\rho(r)) + (m(r) + 4\pi r^3 p)}{r(r-2m(r))}. \quad (9)$$

В нашем случае видно, что для внутреннего решения уравнений Эйнштейна необходимо вводить четыре уравнения, плюс граничные условия – значит, имея уже три уравнения, нам необходимо еще одно уравнение, обычно это последнее выражение называется уравнением состояния:

$$p = p(\rho). \quad (10)$$

Это значит, что, исходя из физических соображений, мы должны задать какую-нибудь специфическую функцию, включающую в себя как давление, так и плотность объекта.

Обычно в качестве уравнения состояния берут баротропическое уравнение, где давление пропорционально плотности:

$$p = \omega\rho, \quad (11)$$

здесь ω – баротропический фактор.

Однако, в нашем случае, мы зададим функцию плотности, которая в явном виде зависит от координат r. Для определенности запишем:

$$\rho(r) = \rho_c - C_1 r - C_2 r^2 - C_3 r^3, \tag{12}$$

где C_1, C_2, C_3 – постоянные коэффициенты.

Частное решение. Теперь мы решим уравнение Эйнштейна с помощью численных методов. Для этого необходимо фиксировать значение постоянных и решать остальные уравнения.

Выше уже была указана необходимость замкнутости уравнений Эйнштейна – нужно задать ещё одно уравнение, которым обычно является уравнение состояния $p = (\rho)$.

Еще один указанный способ замыкания системы дифференциальных уравнений Эйнштейна состоит в том, чтобы задать явный вид для функции плотности $\rho = \rho\,(r)$ или функции давления $p = p(r)$. Чтобы выбрать специфический вид функции нужно иметь в виду физическое поведение данной величины.

Постоянная ρ_c определяет значение плотности в центре тела и должно быть конечной величиной. Постоянные C_1, C_2, C_3 выбираются таким образом, чтобы значение плотности любой точки внутри тела было конечным. Кроме этого требуется, чтобы на поверхности тела, когда $r = R$ (граничные условия), плотность была постоянной:

$$\rho(R) = \rho_c - \mathrm{C}_1 R - \mathrm{C}_2 R^2 - \mathrm{C}_3 R^3 = \rho_R\,. \tag{13}$$

Также в этой работе мы будем рассматривать только те случаи, когда плотность на поверхности равняется нулю:

$$\rho_R = 0 \Rightarrow \rho_c = C_1 R + C_2 R^2 + C_3 R^3. \tag{14}$$

Теперь рассмотрим функцию массы $m(r)$, которая согласно уравнению (8) принимает вид:

$$m(r) = \frac{\pi}{15} r^3 (20\rho_c - 15C_1 r - 12C_2 r^2 - 10C_3 r^3)\,. \tag{15}$$

Общую массу тела можно вычислить как:

$$M = \int_0^R m(r)dr\,. \tag{16}$$

При выборе постоянных коэффициентов C_1, C_2, C_3 нужно, чтобы решение соответствовало физическим условиям задачи. Кроме того, значение общей массы важно для определения значений функции Ф на поверхности тела:

$$e^{2\Phi} = 1 - \frac{2M}{R}\,. \tag{17}$$

Рассмотрим теперь уравнения для функции $\Phi = \Phi(r)$ и давления $p = p(r)$. Нам не удалось найти аналитическое решение этих уравнений, однако мы можем воспользоваться численным методом решения этих функций. Для этого необходимо задать подходящие граничные условия. Исходя из физических соображений мы потребуем, чтобы давление на поверхности тела равнялось нулю и имела конечное значение в центре тела, т.е.:

$$p_R = p(R) = 0\,; \quad p(r = 0) = p_c < \infty\,. \tag{18}$$

Кроме этого, функция давления $p(r)$ должно быть конечной и положительной внутри тела:

$$0 < p(r) < \infty\,; \quad 0 \le r \le R\,. \tag{19}$$

Это обозначает, что постоянные C_1, C_2 и C_3 не могут быть полностью произвольные, а должны быть выбраны таким образом, чтобы высшее сложенные условия имели место. В этом и заключается самая важная проблема нахождения решений дифференциальных уравнений с помощью численных методов. В самом деле, если выбрать значение постоянных произвольным образом, обычно полагаются решения для давления, которые не равняются нулю на поверхности тела, или для которых существует район внутри тела с отрицательными значениями. Очевидно, такие решения не могут быть физическими.

Мы исследовали разные интервалы для значении постоянных C_1, C_2 и C_3 обнаружили, что следующие значения приводят к физическим результатом,

$$C_1 = \frac{1}{2}; \quad C_2 = \frac{1}{6}; \quad C_3 = \frac{1}{24}. \tag{20}$$

Если выбрать радиус тела как $R = 0.4$.

Для этого частного случая интегрирования уравнения (9) дает в качестве решения функцию вида:

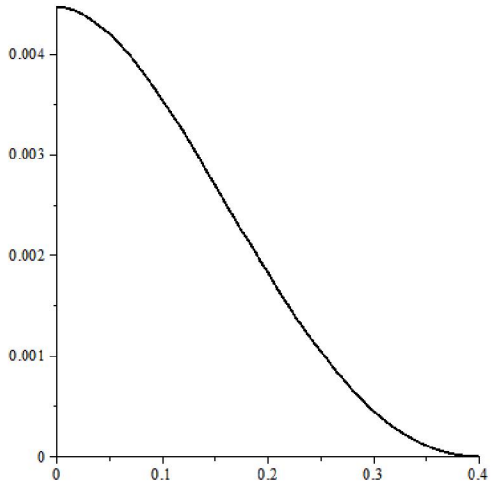

График 1

очевидно, это функция для давления удовлетворяет все физические условия, которые мы представили раньше. С помощью этого численного решения для давления мы интегрируем уравнения (7) и получаем для функции $\Phi(r)$:

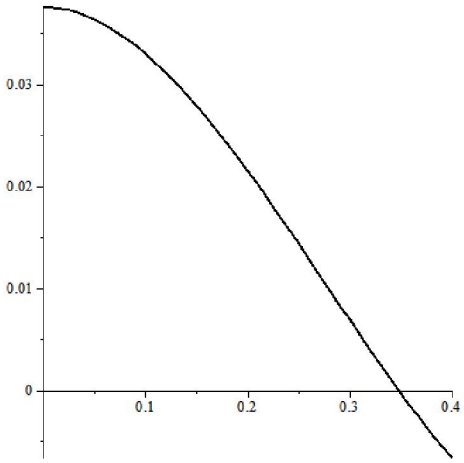

График 2

Заметим, что для этого выбора постоянных C_1, C_2 и C_3, из уравнения (17) и граничного условия (18), мы получаем величины:

$$M = 0.002633; \quad \Phi(R) = 0.0066.$$

Эти значения были использованы, чтобы получать численные решения, заданные на графиках (1) и (2).

Одно очень важное условие, которое должно удовлетворять любое физическое решение – это предел Чандрасекара [5], который утверждает, что распределения массы может быть стабильное только если соотношение $\frac{M}{R} < \frac{4}{9}$ удовлетворяется. В самом деле, при значении $\frac{M}{R} \geq \frac{4}{9}$ наступает гравитационный коллапс и условие статичности линейного элемента (6) нарушается. Исходя из этих соображений мы потребуем, что функция массы $m(r)$ удовлетворяет это условие для всех значений радиальной координаты r, т.е.:

$$\frac{m(r)}{r} < \frac{4}{9}. \tag{21}$$

На графике (3) доказывается справедливость этого условия.

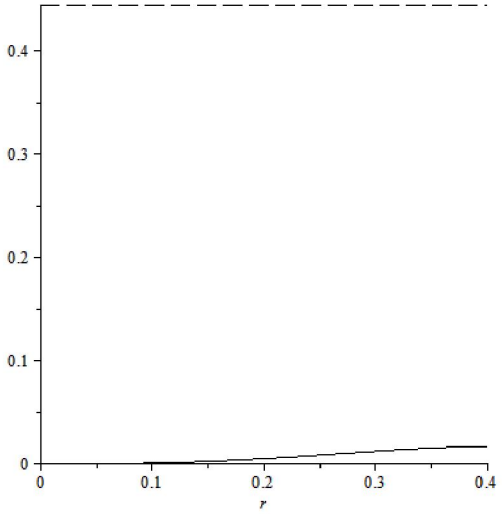

График 3

Заключение. В этой работе мы нашли точное решение уравнений Эйнштейна, которые описывает гравитационные поле сферического симметричного распределения массы. Внешнее поле описывается с помощью метрики Шварцшильда, а для внутреннего поля мы обнаружили численное решение с помощью функции плотности в виде полинома с четырьмя постоянными.

Найденные решение удовлетворяет все физическое условия внутреннего распределения массы, а также условие Чандрасекара. Это значить, что решение можно использовать, чтобы описывать гравитационное поле внутри тела.

Очевидно, найденное решение следует дальше исследовать. В частности нужно найти интервалы C_1, C_2, C_3, ρ_c и ρ_r для которых решение стабильное, в том смысле, что удовлетворяется лимит Чандрасекара, и физическое, в том смысле, что давление, плотность, и общая масса всегда положительные величины. Важно тоже изучать случай когда $\rho_r \neq 0$, который соответствует телу с твердой поверхностью.

В этой работе мы изучали только случай не вращающегося тела. Очевидно, это очень важное условие, чтобы решить дифференциальные уравнения поля. Однако все реальные астрофизические объекты вращаются. Если взять метрику Керра в качестве метрики для внешнего поля, известно, что найти внутреннее решение – это задача весьма сложная, которую не удалость решить в течении последних 50 лет. Поэтому, мы предлагаем другой подход с помощью мультипольных моментов. Для этого можно взять на пример самую простую статичную метрику с квадрупольным моментом [4]. С помощью метода, представленный в этой работе, можно попытаться найти внутреннее решение. Чтобы иметь в виду также вращение тела, предлагается использовать методы генерирования внешних решений [5]. Затем следует обобщить метод, представленный в этой работе с учетом вращения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эйнштейн А.* О космологической проблеме // Собрание научных трудов. Т. II. – М.: Наука, 1966. – 881 с.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
3. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация. Т. II. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
4. *Quevedo H.* // Forts. Physik **38** (1990) 733.
5. *Quevedo H.* // Gen. Rel. Grav. **43** (2010) 1141.

С. Тоқтарбай, Э. Кеведо, М. Әбішев

ЭЙНШТЕЙН ТЕҢДЕУІНІҢ ІШКІ ШЕШІМДЕРІ

Айналмалығы есепке алынбай мінсіз сұйықтықпен толтырылған гравитациялық шар үшін Эйнштейн теңдеуінің жаңа нақты ішкі шешімдері табылды..

S. Toktarbay, Ay. Kevedo, M. Abishev

INTERNAL SOLUTION OF EINSTEIN'S EQUATIONS

We postulate an ansatz for the behavior of the density of a spherically symmetric mass distribution such that it is finite at the center of the body and vanishes at the surface. With this particular density we integrate the corresponding Oppenheimer-Volkoff equation to obtain a pressure function that vanishes at the surface of the body and is finite everywhere inside the body. The metric functions are obtained numerically by using the values of the exterior Schwarzschild solution as initial conditions. It is shown that there exists a range of values for the density and the pressure in the center of the body such that no gravitational collapse can take place.