УДК 510.6

К. М. ТУЛЕНБАЕВ

ПРОСТОТА АНТИКОММУТАТИВНЫХ ОБОБЩЕННО ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР

Статья посвящена доказательству того факта, что конечномерная антикоммутативная обобщенно йорданова алгебра является лиевой. Алгебры Ли имеют важное применение в теоретической физике и являются достаточно изученным классом алгебр [3]. Обобщенно йорданова алгебра задается условием, что взятие коммутатора является дифференциальным оператором, то есть удовлетворяет тождеству Лейбница [1]. Обобщенно йордановы алгебры являются новым классом неассоциативных алгебр. В данной работе показано, что при введении тождества степени два, в частности, тождества антикоммутативности, мы не получаем нового класса простых алгебр.

В данной работе мы доказываем, что простая антикоммутативная обобщенно йорданова алгебра в конечной размерности является лиевой. Алгебра A называется обобщенно йордановой, если выполняется тождество:

$$x(y(ab))-y(x(ab)) =$$

$$= a(x(yb))-a(y(xb))+(x(ya))b-(y(xa))b \quad (*).$$

Выберем x, y так, что $x \cdot y = 0$. Обозначим якобиан $Jac(a,b,c) = a(bc)+b(ca)+c(ab)$, тогда верна следующая лемма.

Лемма 1. $Jac(x,y,c) = [R_x, R_y](c)$

Доказательство. Верно следующее равенство

$$Jac(x,y,ab) =$$

$$= aJac(x,y,b) - bJac(x,y,a) + Jac(a,b,xy)\,.$$

$$Jac(x,y,ab) = aJac(x,y,b) - bJac(x,y,a)$$

$$J_{ac} = (x,y,c) = [R_x, R_y](c) \quad (т.к.\ \ xy = 0)$$

и выполнено тождество антикоммутативности [2].

Лемма доказана.

Пусть C – образ при действии $[R_x, R_y]$ на A. Тогда выполнена следующая лемма.

Лемма 2. dim C < dim A.

Доказательство. Ясно, что $x(yx)-y(xx) = 0$, так как $xy = 0$ и антикоммутативность.

Поэтому получаем $x(yy) - y(xy) = 0$.

Следовательно, $x, y \in V_0 \Rightarrow \dim\ V_0 \geq 2$.

Рассмотрим корневое разложение:

$$A = V_0 \oplus V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_k} \qquad V_\lambda \bullet V_\mu \subset V_{\lambda+\mu}$$

$$[R_x, R_y](V_0 \oplus V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_k}) = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_k} \oplus V_0'$$

$$\dim V_0' \prec \dim V_0$$

Лемма доказана.

Теперь мы можем доказать основную теорему.

Теорема. Простая антикоммутативная обобщенно йорданова алгебра является лиевой.

Доказательство. $\exists \quad a \neq 0 \;\; [R_x, R_y](a) = a$ (иначе алгебра нильпотентна).

Используя простоту алгебры A, получаем $\prec a \succ = A$ и так как $A^2 = A \Rightarrow A = \{ab \mid b \in A\}$ (также используем антикоммутативность)

$$Jac(x,y,ab) = aJac(x,y,b) - bJac(x,y,a) =$$

$$= aJac(x,y,b) + ab \Rightarrow ab \in C + aC$$

так как $aC \subset C \;\Rightarrow\; ab \in C \;\Rightarrow A \subset C$. Противоречие, так как по Лемме 2. $\dim C \prec \dim A$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gerstenhaber M.* The cohomology structure of an associative rings // Ann. of Math. 1963. 78. P. 267-288.

2. *Jacobson N.* Restricted Lie algebras in characteristic p // Trans. AMS 1941. 50. P. 15-25.

3. *Dzhumadil'daev A.S.* Central extensions of infinite dimensional Lie algebras // Funct. Anal. Pril. 26 (1992). N 4. P. 21-29.

Резюме

Мақала соңғыөлшемді антикоммутативтік жалпы Йордан алгебрасы Лиевтік екендігін дәлелдеу факторына арналған. Ли алгебрасы теориялық физикада маңызды қолданысқа ие және жеткілікті зерттелген алгебра болып саналады. Талдам қорытылған Йорданова алгебрасы коммутатордың алынуы дифференциалды оператор болу жағдайына сай, демек Лейбниц үйлесімін қанағаттандырады.

Summary

This article is devoted to proof of theorem that anti-commutative simple General Jordan algebras in finite dimension are Lie algebras. This wonderful fact proved that adding identity of degree two does not gives new examples of non-associative algebras. General Jordan algebras naturally appeared from generalization of Leibniz rule of differentiation for commutator operator $[R_x, R_y]$ for two elements x, y of General Jordan algebra A. The properties of General Jordan algebras are in wide use in theory of dynamical systems and theoretical physics.

Институт Математики

МОН РК, г. Алматы

Поступила 25.10.10г.