А. ТУНГАТАРОВ, Б. ОМАРБАЕВА

(Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы)

ЗАДАЧА ТИПА КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ *n*-ПОРЯДКА

С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Аннотация

В работе найдено общее решение обыкновенных дифференциальных уравнений n-порядка с перемен-ными коэффициентами и решена задача Коши.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения n-порядка, задача Коши, переменные коэффициенты, общее решение.

Кілт сөздер: n-ретті қарапайым дифференциалдық тедеу, Коши есебі, ауыспалы коэффициенттер, жалпы шешім.

Keywords: обыкновенные дифференциальные уравнения n-порядка, задача Коши, переменные коэффи-циенты, общее решение.

1. Введение.

Пусть $-\infty < x_1 < x_2 < \infty$, n – натуральное число и $S[x_1,x_2]$ – класс существенно ограниченных и измеримых в $[x_1,x_2]$ функций. Норма в $S[x_1,x_2]$ определяется по формуле

$$\| f \|_{S[x_1,x_2]} = \sup vrai_{x\in[x_1,x_2]} | f(x) | = \lim_{p\to\infty} \| f \|_{L_p[x_1,x_2]} .$$

Рассмотрим в $[x_1,x_2]$ уравнение

$$\frac{d^n u}{dx^n} - p(x)u = f(x), \tag{1}$$

где $p(x) \in S[x_1, x_2]$, $f(x) \in L_1[x_1, x_2]$.

Общее решение уравнения (1) отыскиваем из класса

$$C\left[x_1, x_2\right] \cap W_\infty^n \left[x_1, x_2\right] \tag{2}$$

Здесь $W_\infty^n \left[x_1, x_2\right]$ – класс функции $f(x)$, для которых

$$\frac{d^n f}{d\,x^n} \in S\left[\,x_1, x_2\,\right].$$

Замечание. Если $p(x), f(x) \in C\,[x_1, x_2\,]$, то решения, которые мы здесь построим, принадле-жат классу $C^n[x_1,x_2]$.

Общее решение уравнения (1)построено при $n = 2$ в [1-4], а при $n = 3$ в [5].

Следует отметить, что общее решение линейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с переменными коэффициентами в явном виде в научных литературах не приведено.

2. Построение общего решения.

Интегрируя n раз уравнение (1), получим

$$u(x) = (Bu)(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k\,(x - x_0\,)^{k-1} \,+ g(x), \tag{3}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – произвольные действительные числа, $x_0 \in [x_1, x_2\,)$,

$$(Bu)(x) = \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{y_1}\int\limits_{x_0}^{y_2}\ldots\int\limits_{x_0}^{y_{n-1}} p(t)u(t)dtdy_{n-1}dy_{n-2}\ldots dy_1\,,$$

$$g(x) = \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{y_1}\int\limits_{x_0}^{y_2}\ldots\int\limits_{x_0}^{y_{n-1}} f(t)dtdy_{n-1}dy_{n-2}\ldots dy_1.$$

Действуя оператором B к уравнению (3), имеем

$$(Bu)(x) = (B^2u)(x) + (Bg)(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k\,a_{k,1}(x), \tag{4}$$

где $$(B^2u)(x) = (B(Bu)(x))(x),$$

$$a_{k,1}(x) = \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{y_1}\int\limits_{x_0}^{y_2}\ldots\int\limits_{x_0}^{y_{n-1}} (t - x_0\,)^{k-1}\,p(t)dtdy_{n-1}dy_{n-2}\ldots dy_1.$$

Из (3) и (4) следует

$$u(x) = (B^2u)(x) + (Bg)(x) + g(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k\left((x - x_0\,)^{k-1} \,+ a_{k,1}(x)\right) \tag{5}$$

Опять действуем оператором B теперь к уравнению (5). Тогда получим

$$(Bu)(x) = (B^3u)(x) + (B^2g)(x) + (Bg)(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k\left(a_{k,1}(x) + a_{k,2}(x)\right), \tag{6}$$

где

$$(B^k f)(x) = (B(B^{k-1} f)(x))(x),$$

$$a_{k,2}(x) = (B(a_{k,1}(x)))(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{y_1}\int_{x_0}^{y_2}\ldots\int_{x_0}^{y_{n-1}} p(t)a_{k,1}(t)dtdy_{n-1}dy_{n-2}\ldots dy_1.$$

Из (3) и (6) следует

$$u(x) = (B^3 u)(x) + g(x) + (Bg)(x) + (B^2 g)(x) + (B^3 g)(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k \left((x-x_0)^{k-1} + a_{k,1}(x) + a_{k,2}(x)\right).$$

Продолжая эту процедуру m раз, получим интегральное представление решений уравнения (1):

$$u(x) = (B^m u)(x) + g(x) + \sum_{k=1}^{n}(B^k g)(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k ((x-x_0)^{k-1} + \sum_{l=1}^{m-1} a_{k,l}(x)), \qquad (7)$$

где

$$a_{k,l}(x) = (Ba_{k,l-1}(x))(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{y_1}\int_{x_0}^{y_2}\ldots\int_{x_0}^{y_{n-1}} p(t)a_{k,l-1}(t)dtdy_{n-1}dy_{n-2}\ldots dy_1, \quad (l = \overline{2, m-1}).$$

Из вида функций $(B^k f)(x)$, $a_{k,l-1}(x)$ следует

$$\left|(B^m u)(x)\right| \le |u|_1 \frac{(\sqrt[n]{|\mathrm{p}|_0}\cdot|x-x_0|)^{nm}}{(mn)!}, \quad \left|(B^k g)(x)\right| \le |g|_0 \frac{(\sqrt[n]{|p|_0}\cdot|x-x_0|)^{kn}}{(kn)!},$$

$$\left|a_{k,l}(x)\right| \le |p|_0^l \frac{|x-x_0|^{nl}}{(nl)!}. \qquad (8)$$

Здесь $|f|_0 = \sup vrai_{x\in[x_1, x_2]} |f(x)|, \quad |f|_1 = \max_{x\in[x_1, x_2]} |f(x)|$.

Если переходим к пределу при $m \to \infty$ в (7), то с учетом (8), получим

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot I_k(x) + F(x), \qquad (9)$$

где

$$I_k(x) = (x-x_0)^{k-1} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{k,m}(x), \; F(x) = g(x) + \sum_{m=1}^{\infty}(B^m g)(x)$$

Из неравенств (8) получим оценки

$$\left|I_k(x)\right| \le \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\sqrt[n]{|\mathrm{p}|_0}\cdot|x-x_0|)^{nm}}{(nm)!}, \quad (k = \overline{1,n}), \qquad \left|F(x)\right| \le |g|_0 \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\sqrt[n]{|\mathrm{p}|_0}\cdot|x-x_0|)^{mn}}{(mn)!}.$$

Вронскиан функции $I_1(x)$, $I_2(x)$, …, $I_n(x)$ в точке x_0 отличен от нуля:

$$W(x_0)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1! & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (n-1)! \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Поэтому эти функции линейно независимы в $[x_1, x_2]$.

Легко можно убедиться в справедливости равенств

$$\frac{d^n I_k}{dx^n} - p(x) I_k = 0, \quad (k=\overline{1,n}), \qquad \frac{d^n F}{dx^n} - p(x)F(x) = f(x).$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Общее решение уравнения (1) имеет вид (9).*

3. Решение задачи Коши.

Задача Коши.*Требуется найти решение уравнения (1) из класса (2), удовлетворяющее началь-ным условиям*

$$\begin{gathered} \alpha_{11}u(x_0) + \alpha_{12}u'(x_0) + \dots + \alpha_{1n}u^{(n-1)}(x_0) = \beta_1, \\ \alpha_{21}u(x_0) + \alpha_{22}u'(x_0) + \dots + \alpha_{2n}u^{(n-1)}(x_0) = \beta_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}u(x_0) + \alpha_{n2}u'(x_0) + \dots + \alpha_{nn}u^{(n-1)}(x_0) = \beta_n. \end{gathered} \tag{10}$$

где α_{kj}, $(k, j=\overline{1,n})$, β_k, $(k=\overline{1,n})$ − *заданные действительные числа,*

$$u^{(k)}(x_0) = \left.\frac{d^k u}{dx^k}\right|_{x=x_0}$$

Решим задачу Коши. Для решения задачи Коши используем формулу (9).

Из вида функции $I_k(x)$, $(k=\overline{1,n})$ и $F(x)$ следует

$$\begin{gathered} I_k^{(l)}(x_0) = \begin{cases} (l-1)!, & \text{если } k=l, \\ 0, & \text{если } k \neq l, \end{cases} \quad (k=\overline{1,n}), \ (l=\overline{1,n-1}), \\ I_k(x_0) = \begin{cases} 1, & \text{если } k=1, \\ 0, & \text{если } k \neq 1, \end{cases} \end{gathered} \tag{11}$$

$$F^{(k)}(x_0) = 0, \quad (k=\overline{1,n-1}).$$

Подставляя функцию $u(x)$, заданную по формуле (9), в начальные условия (10) и учитывая при этом равенства (11), получим систему n алгебраических уравнений с n переменными $c_1, c_2, \dots, c_n$:

$$
\begin{cases}
\alpha_{11} \cdot c_1 + 1! \cdot \alpha_{12} \cdot c_2 + \ldots + (n-1)! \cdot \alpha_{1n} \cdot c_n = \beta_1, \\
\alpha_{21} \cdot c_1 + 1! \cdot \alpha_{22} \cdot c_2 + \ldots + (n-1)! \cdot \alpha_{2n} \cdot c_n = \beta_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{n1} \cdot c_1 + 1! \cdot \alpha_{n2} \cdot c_2 + \ldots + (n-1)! \cdot \alpha_{nn} \cdot c_n = \beta_n.
\end{cases} \tag{12}
$$

Пусть

$$
\Delta = \begin{pmatrix}
\alpha_{11} & 1! \cdot \alpha_{12} & \ldots & (n-1)! \cdot \alpha_{1n} \\
\alpha_{21} & 1! \cdot \alpha_{22} & \ldots & (n-1)! \cdot \alpha_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_{n1} & 1! \cdot \alpha_{n2} & \ldots & (n-1)! \cdot \alpha_{nn}
\end{pmatrix}
$$

Из (12) при $|\Delta| \neq 0$ получим

$$
c_k = \frac{|\Delta_k|}{|\Delta|}, \tag{13}
$$

где Δ_k – матрица, полученная из Δ заменой k-го столбца столбцом из свободных членов.

При $|\Delta| = 0$ для разрешимости алгебраической системы (12) необходимо и достаточно выпол-нения равенств

$$
|\Delta_k| = 0, \ (k = \overline{1,n}) \tag{14}
$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *При* $|\Delta| \neq 0$ *задача Коши имеет единственное решение, которое находится по формулам (9), (13). При* $|\Delta| = 0$ *для разрешимости задачи Коши необходимо и достаточно выполнения равенств (14). В этом случае задача имеет бесконечное множество решений, которые находятся по формуле (9), где* c_k *определяется из (12).*

ЛИТЕРАТУРА

1 Tungatarov A., Akhmed-Zaki D.K. Cauchy problem for on class of ordinary differential equations // Int. Journal of Math. Analysis. – 2012. – Vol. 6, N 14. – P. 695-699.

2 Tungatarov A., Akhmed-Zaki D.K. General solution of second order linear ordinary differential equations with variable coefficients // Journal of Inequalities and Special functions. – ISSN: 2217-4303. – URL: http//www.ILIRIAS.com. – Vol. 3. – Issue 4 (2012). – P. 42-49.

3 Тунгатаров А., Ахмед-Заки Д. Задача Коши для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Вестник КазНУ им. аль-Фараби. Серия математика, механика и информатика. – 1911. – № 3(70). – С. 31-35.

4 Тунгатаров А., Ахмед-Заки Д.К. Задача типа Коши для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами // Мат-лы VI-й междун. научной конф. «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры», Актобе, 2012. – С. 165-168.

5 Тунгатаров А., Омарбаева Б., Уаисов Б.Задача типа Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами // Вестник КазНУ им. аль-Фараби. Серия математика, механика и информатика. – 2012. – № 2(73). – С. 49-55.

REFERENCES

1 Tungatarov A., Akhmed-Zaki D.K. Cauchy problem for on class of ordinary differential equations // Int. Journal of Math. Analysis. – 2012. – Vol. 6, N 14. – P. 695-699.

2 Tungatarov A., Akhmed-Zaki D.K. General solution of second order linear ordinary differential equations with variable coefficients // Journal of Inequalities and Special functions. – ISSN: 2217-4303. – URL: http//www.ILIRIAS.com. – Vol. 3. – Issue 4 (2012). – P. 42-49.

3 Tungatarov A., Ahmed-Zaki D. Zadacha Koshi dlja odnogo klassa obyknovennyh differencial'nyh uravnenij vtorogo porjadka // Vestnik KazNU im. al'-Farabi. Serija matematika, mehanika i informatika. – 1911. – № 3(70). – S. 31-35.

4 Tungatarov A., Ahmed-Zaki D.K. Zadacha tipa Koshi dlja linejnyh obyknovennyh differencial'nyh uravnenij vtorogo porjadka s peremennymi kojefficientami // Mat-ly VI-j mezhdun. nauchnoj konf. «Problemy differencial'nyh uravnenij, analiza i algebry», Aktobe, 2012. – S. 165-168.

5 Tungatarov A., Omarbaeva B., Uaisov B. Zadacha tipa Koshi dlja obyknovennyh differencial'nyh uravnenij tret'ego porjadka s peremennymi kojefficientami // Vestnik KazNU im. al'-Farabi. Serija matematika, mehanika i informatika. – 2012. – № 2(73). – S. 49-55.

Резюме

А. Тұңғатаров, Б. Омарбаева

(әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ.)

n-ші РЕТТІ АЙНЫМАЛЫ КОЭФФИЦИЕНТТЕРІ БАР ЖАЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН КОШИ ЕСЕБІ

Мақалада *n*-ші ретті айнымалы коэффициенттері бар жай дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімі табылған және Коши есебі шешілген.

Кілт сөздер: *n*-ретті қарапайым дифференциалдық тедеу, Коши есебі, ауыспалы коэффициенттер, жалпы шешім.

Summary

A. Tungatarov, B. Omarbayeva

(Al-Farabi Kazakh national university, Almaty)

GENERAL SOLUTION OF nth ORDER LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS

In this article the general solution of n^{th} order ordinary differential equations is found. The Cauchy problem for this equation is solved.
Keywords: ordinary differential equations *n*-order cauchy problem, the variable coefficients, the general solution.

Поступила 17.04.2013г