Г. А. ТУРЕТАЕВА

ПЕРВЫЕ ГРУППЫ КОГОМОЛОГИИ ПРОСТЫХ МОДУЛЕЙ НАД АЛГЕБРОЙ ЛИ ТИПА A_4

(Представлена академиком НАН РК А. С. Джумадильдаевым)

Вычислены первые группы когомологии алгебры Ли типа A_4 над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 5$ с коэффициентами в простых модулях.

Введение. Первые группы когомологии классических алгебр Ли в положительной характеристике изучены в работе [1]. Автором был предложен эффективный метод вычисления первой группы когомологии неприводимого представления, основанного на вычисления когомологии первой инфинитезимальной подгруппы (ядро отображения Фробениуса) алгебраической группы данной алгебры Ли с коэффициентами в дуальных модулях Вейля. Однако структура модулей Вейля известны только для алгебр Ли малых рангов, таких как A_1, B_2, G_2, A_2, A_3. Поэтому в положительной характеристике первые группы когомологии простых модулей полностью описаны только для следующих классических алгебр Ли A_1 [2], B_2 [3], G_2 [4], A_2, A_3 [1]. Следующей по сложности вычисления является алгебра Ли типа A_4. Целью данной работы является полное описание первых групп когомологии простых модулей над алгеброй Ли типа A_4 в положительной характеристике $p > 5$.

1. Обозначения и предварительные факты

1.1. Обозначения. Пусть G – простая односвязная алгебраическая группа $SL_5(k)$ над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 5$, и g – ее алгебра Ли. Будем считать, что G определена и расщепляется над простым подполем F_p поля k. Пусть $G_1 = KerF$, где F – отображения Фробениуса на G.

Пусть R – система корней группы G с максимальным коротким корнем $\alpha_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, и $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, $R_+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4\}$ – множества простых и положительных корней соответственно. Обозначим через B и T соответственно подгруппу Бореля и максимальный тор группы G. Действие группы Вейля W системы R на группу характера $X(T)$ максимального тора T определяется по формуле $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$, где $s_\alpha \in W$, $\alpha \in R$ и $\alpha^\vee$ – дуальный к α корень. Точечное действие группы Вейля определяется через полусуммы всех положительных корней ρ по формуле $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$, где $w \in W$, $\lambda \in X(T)$. Если $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ – фундаментальные веса, то $\rho = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$.

Структура рационального G-модуля зависит от расположения его старших весов относительно альковов аффинной группы Вейля. Аффинная группа Вейля W_p порождается отражениями вида $s_{\alpha,np}$ для всех $\alpha \in R_+$ и $n \in Z$. Обычно используется точечное действие $s_{\alpha,np} \cdot \lambda = \lambda - \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \alpha + np\alpha$ аффинной группы Вейля.

Пусть $X_+(T) = \{\lambda \in X(T) \mid \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \geq 0$ *для всех* $\alpha \in S\}$ – множество доминантных весов и $X_1(T) = \{\lambda \in X(T) \mid 0 \leq \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle < p$ *для всех* $\alpha \in S\}$ – множество ограниченных весов.

Для любого $\lambda \in X(T)$ существует одномерный B-модуль k_λ и индуцированный G-модуль $H^0(\lambda) = Ind_B^G(k_\lambda)$. Известно, что $H^0(\lambda) \neq 0$ тогда и только тогда, если $\lambda \in X_+(T)$. Если $V(\lambda)$ – модуль Вейля со старшим весом λ, то $H^0(\lambda) \approx V(-w_0(\lambda))^*$ [5]. Пусть $L(\lambda)$ – простой

G-модуль со старшим весом λ. Его можно определить через $H^0(\lambda)$ или через $V(\lambda)$. С одной стороны, он простой цоколь $H^0(\lambda)$ и, с другой стороны, единственный простой фактор-модуль $V(\lambda)$ по максимальному подмодулю. Если $\lambda \in X_1(T)$, то все три G-модули, введенные выше, могут быть рассмотрены как G_1 (следовательно и g-модули), причем $L(\lambda)$ остается простым при переходе к G_1 (алгебре Ли g).

Пусть L – рациональный G-модуль. Через $L^{(d)}$ обозначим кручение Фробениуса степени d для L. Тогда существует рациональный G-модуль V, такой что $V^{(d)} = L$, обозначим его через $L^{(-d)}$.

1.2. Предварительные факты. При доказательстве основной теоремы мы используем следующие известные факты.

1.2.1. Принцип связанности. Пусть $\lambda, \mu \in X(T)$. Назовем λ *G_1-связанным с μ*, если $\lambda \in W \cdot \mu + pX(T)$. Если $H^i(G_1, L(\lambda)) \neq 0$, то λ G_1-связан с нулевым весом [5], II.9.19.

1.2.2. Фильтрация Янцена для модулей Вейля [6], [7]. Для модуля Вейля $V(\lambda)$ со старшим весом $\lambda \in X_+(T)$ существует следующая убывающая последовательность подмодулей

$$V(\lambda) = V(\lambda)^0 \supset V(\lambda)^1 \supset \cdots \supset V(\lambda)^i \supset \cdots,$$

где $V(\lambda)^i = 0$ для достаточно больших i. Формальный характер фильтрации Янцена удовлетворяет «формулу сумм»

$$\sum_{i>0} \chi(V(\lambda)^i) = \sum_{\alpha \in R_+} \sum_{0<mp<\langle \lambda+\rho, \alpha^\vee \rangle} \nu(mp)\chi(s_{\alpha,mp} \cdot \lambda). \tag{1.1}$$

В формуле (1.2) символ χ обозначает формальный характер модуля в характеристике нуль. Обозначим формальный характер простого G-модуля $L(\lambda)$ в характеристике $p > 0$ через $\chi_k(\lambda)$. Следующие утверждения, позволяют определить композиционные факторы и их кратности в фильтрации Янцена :

Лемма 1.1. [8], предложение. 1.1. *Пусть $\lambda \in X_+(T)$. Для любого доминантного веса $\mu < \lambda$ существуют неотрицательные целые числа $a(\lambda, \mu)$ и $b(\lambda, \mu)$ такие, что*

$$\chi(\lambda) = \chi_k(\lambda) + \sum_{\mu<\lambda} a(\lambda, \mu)\chi_k(\mu) \text{ и}$$

$$\sum_{i>0} \chi(V(\lambda)^i) = \sum_{\mu<\lambda} b(\lambda, \mu)\chi_k(\mu),$$

причем $b(\lambda, \mu) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $a(\lambda, \mu) \neq 0$; $a(\lambda, \mu) \leq b(\lambda, \mu)$.

Пусть $C = \{\lambda \in X(T) \mid 0 < \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle < p$ *для всех* $\alpha \in R_+\}$, $\overline{C}$ – ее замыкание и S – множество отражений, соответствующих стенкам алькова C. Для $w \in W_p$ пусть $\tau(w) = \{s \in S \mid ws \cdot \omega < w \cdot \omega\}$, где ω – произвольный элемент C. Обозначим через $[V(\lambda) : L(\mu)]$ кратность композиционного фактора $L(\mu)$ в фильтрации Янцена для модуля Вейля $V(\lambda)$.

Лемма 1.2. [7], теорема на стр. 297. *Пусть $\omega \in C$ и $w, w' \in W_p$ такие, что $w \cdot \omega, w' \cdot \omega \in X_+(T)$. Тогда для всех $s \in S$ таких, что $s \notin \tau(w')$ имеет место равенство*

$$[V(w \cdot \omega) : L(w' \cdot \omega)] =$$

$$= \begin{cases} [V(ws \cdot \omega) : L(w' \cdot \omega)], \text{ если } ws \cdot \omega \in X_+(T), \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Лемма 1.2 позволяет определить кратность одного композиционного фактора через кратность другого фактора в фильтрации Янцена и называется принципом перехода.

2. Предварительные результаты

В данном пункте мы опишем структуру максимального подмодуля модуля $V(\lambda)$ для всех $\lambda \in W \cdot 0 + pX(T)$. Имеются 120 таких модулей Вейля. Пусть $p > 5$, $\omega_0 \in C = \{\lambda \in X(T) \mid 0 < \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle < p$ *для всех* $\alpha \in R_+\}$, и введем на рассмотрение следующие веса:

$$\omega_{00} = s_{\tilde{\alpha},p} \cdot \omega_0,$$

$$\omega_{0i} = s_{\tilde{\alpha},p} \circ s_1 \circ \cdots \circ s_i \cdot \omega_0 \text{ и}$$

$$\omega_{5-i,0} = s_{\tilde{\alpha},p} \circ s_4 \circ \cdots \circ s_i \cdot \omega_0, \; i = 1,2,3,4;$$

$\omega_{5-i,j} = s_{\tilde{\alpha},p} \circ s_4 \circ \cdots \circ s_i \circ s_1 \circ \cdots \circ s_j \cdot \omega_0$,

$i = 2,3,4,\ j = 1,2,3,4$ *и* $(i,j) \neq (2,1)$;

$\mu_{5-i,j} = s_{\tilde{\alpha},p} \circ s_4 \circ \cdots \circ s_i \circ s_1 \circ \cdots \circ s_j \cdot \omega_{00}$,

$i = 2,3,4,\ j = 1,2,3,4$ *и* $(i,j) \neq (2,1)$;

$\mu_{04} = s_{\tilde{\alpha},p} \circ s_1 \circ \cdots \circ s_4 \cdot \omega_{00}$ *и*

$\omega_{40} = s_{\tilde{\alpha},p} \circ s_4 \circ \cdots \circ s_1 \cdot \omega_{00}$

$\delta_{5-i,j} = s_{\tilde{\alpha},p} \circ s_4 \circ \cdots \circ s_i \circ s_1 \circ \cdots \circ s_j \cdot \omega_{10}$,

$i = 3,4,\ j = 1,2,3,4$ *и* $(i,j) \neq (4,1),(4,2)$;

$\gamma_{5-i,j} = s_{\tilde{\alpha},p} \circ s_4 \circ \cdots \circ s_i \circ s_1 \circ \cdots \circ s_j \cdot \omega_{01}$,

$i = 2,3,4,\ j = 2,3$;

$\pi_{13} = s_{\tilde{\alpha},p} \circ s_4 \circ s_1 \circ s_2 \circ s_3 \cdot \omega_{11}$;

$\pi_{22} = s_{\tilde{\alpha},p} \circ s_4 \circ s_3 \circ s_1 \circ s_2 \cdot \omega_{11}$;

$\pi_{23} = s_{\tilde{\alpha},p} \circ s_4 \circ s_3 \circ s_1 \circ s_2 \circ s_3 \cdot \omega_{11}$;

$\theta_{13} = s_{\tilde{\alpha},p} \circ s_4 \circ s_1 \circ s_2 \circ s_3 \cdot \mu_{11}$;

$\theta_{22} = s_{\tilde{\alpha},p} \circ s_4 \circ s_3 \circ s_1 \circ s_2 \cdot \mu_{11}$;

$\theta_{23} = s_{\tilde{\alpha},p} \circ s_4 \circ s_3 \circ s_1 \circ s_2 \circ s_3 \cdot \mu_{11}$.

Предложение 2.1. *Пусть g – алгебра Ли типа A_4 над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 5$ и $\omega_0 \in \{0,(p-5)\lambda_1,(p-5)\lambda_2,$ $(p-5)\lambda_3,(p-5)\lambda_4\}$. Тогда:*

(i) $V(\omega_0)^1 / V(\omega_0)^2 = (0)$

(ii) $V(\omega_{00})^1 / V(\omega_{00})^2 = L(\omega_0)$

(iii) $V(\omega_{0i})^1 / V(\omega_{0i})^2 = L(\omega_{0,i-1})$ *для* $i = 1,2$;

(iv) $V(\omega_{i0})^1 / V(\omega_{i0})^2 = L(\omega_{i-1,0})$ *для* $i = 1,2$;

(v) $V(\omega_{11})^1 / V(\omega_{11})^1 = L(\omega_{01}) \oplus L(\omega_{10}) \oplus L(\omega_0)$

(vi) $V(\omega_{12})^1 / V(\omega_{12})^2 = L(\omega_{02}) \oplus L(\omega_{11})$;

(vii) $V(\omega_{21})^1 / V(\omega_{21})^2 = L(\omega_{20}) \oplus L(\omega_{11})$;

(viii) $V(\omega_{13})^1 / V(\omega_{13})^2 =$

$= L(\omega_{03}) \oplus L(\omega_{12}) \oplus L(\omega_{21}) \oplus L(\omega_{01}) \oplus L(\omega_0)$;

(ix) $V(\omega_{22})^1 / V(\omega_{22})^2 =$

$= L(\omega_{30}) \oplus L(\omega_{21}) \oplus L(\omega_{12}) \oplus L(\omega_{10}) \oplus L(\omega_0)$;

(x) $V(\omega_{23})^1 / V(\omega_{23})^2 =$

$= L(\omega_{13}) \oplus L(\omega_{22}) \oplus L(\omega_{00})$;

(xi) $V(\mu_{11})^1 / V(\mu_{11})^2 = L(\omega_{11})$;

(xii) $V(\mu_{12})^1 / V(\mu_{12})^2 =$

$= L(\mu_{11}) \oplus L(\omega_{12}) \oplus L(\omega_{10})$;

(xiii) $V(\mu_{21}) / V(\mu_{21})^2 =$

$= L(\mu_{11}) \oplus L(\omega_{21}) \oplus L(\omega_{01})$;

(xiv) $V(\mu_{13})^1 / V(\mu_{13})^2 = L(\mu_{12}) \oplus L(\mu_{21}) \oplus$

$\oplus L(\omega_{13}) \oplus L(\omega_{20}) \oplus L(\omega_{10}) \oplus L(\omega_{00})$;

(xv) $V(\mu_{22})^1 / V(\mu_{22})^2 = L(\mu_{21}) \oplus L(\mu_{12}) \oplus$

$\oplus L(\omega_{22}) \oplus L(\omega_{02}) \oplus L(\omega_{01}) \oplus L(\omega_{00})$;

(xvi) $V(\mu_{23})^1 / V(\mu_{23})^2 =$

$= L(\mu_{13}) \oplus L(\mu_{22}) \oplus L(\omega_{23}) \oplus L(\omega_{03}) \oplus L(\omega_{30})$

(xvii) $V(\delta_{13})^1 / V(\delta_{13})^2 =$

$= L(\delta_{21}) \oplus L(\mu_{13}) \oplus L(\omega_{14}) \oplus L(\omega_{21}) \oplus L(\omega_0)$;

(xviii) $V(\delta_{23})^1 / V(\delta_{23})^2 = L(\delta_{13}) \oplus L(\delta_{22}) \oplus$

$\oplus L(\mu_{23}) \oplus L(\mu_{12}) \oplus L(\omega_{24}) \oplus L(\omega_{04}) \oplus L(\omega_{22})$;

(xix) $V(\gamma_{22})^1 / V(\gamma_{22})^2 =$

$= L(\gamma_{12}) \oplus L(\mu_{22}) \oplus L(\omega_{32}) \oplus L(\omega_{12}) \oplus L(\omega_0)$;

(xx) $V(\gamma_{23})^1 / V(\gamma_{23})^2 = L(\gamma_{13}) \oplus L(\gamma_{22}) \oplus$

$\oplus L(\mu_{23}) \oplus L(\mu_{21}) \oplus L(\omega_{33}) \oplus L(\omega_{40}) \oplus L(\omega_{13})$;

(xxi) $V(\pi_{23})^1 / V(\pi_{23})^2 = L(\pi_{13}) \oplus$

$\oplus L(\pi_{22}) \oplus L(\delta_{23}) \oplus L(\gamma_{23}) \oplus L(\delta_{21}) \oplus$

$\oplus L(\gamma_{12}) \oplus L(\mu_{11}) \oplus L(\omega_{34}) \oplus L(\omega_{14}) \oplus$

$\oplus L(\omega_{32}) \oplus L(\omega_{12}) \oplus L(\omega_{21})$;

(xxii) $V(\theta_{23})^1 / V(\theta_{23})^2 = L(\theta_{13}) \oplus L(\theta_{22}) \oplus$

$\oplus L(\pi_{23}) \oplus L(\delta_{24}) \oplus L(\gamma_{33}) \oplus L(\delta_{22}) \oplus L(\gamma_{13}) \oplus$

$\oplus L(\mu_{34}) \oplus L(\mu_{14}) \oplus L(\mu_{32}) \oplus L(\mu_{12}) \oplus$

$\oplus L(\mu_{21}) \oplus L(\mu_{20}) \oplus L(\omega_{02}) \oplus L(\omega_{23})$.

Доказательство. Утверждения *(i)–(iv)* следуют из основного результата работы [8]. Докажем утверждения *(v)*. Все остальные утверждения доказываются аналогичным путем.

По формуле сумм (1.1)

$$\sum_{i>0}\chi(V(\omega_{11})^i)=$$

$$=\chi_k(\omega_{01})+\chi_k(\omega_{10})+2\chi_k(\omega_{00})+\chi_k(\omega_0).$$

Тогда согласно леммам 1.1 и 1.2

$$\chi(\omega_{11})=\chi_k(\omega_{11})+\chi_k(\omega_{01})+\chi_k(\omega_{10})+$$
$$+2\chi_k(\omega_{00})+\chi_k(\omega_0).$$

Следовательно, фильтрация Янцена для $V(\omega_{11})$ имеет вид

$$V(\omega_{11})\supset L(\omega_{01})+L(\omega_{10})+L(\omega_{00})+L(\omega_0)\supset$$
$$\supset L(\omega_{00})\supset(0).$$

Откуда

$$V(\omega_{11})^1/V(\omega_{11})^1=L(\omega_{01})\oplus L(\omega_{10})\oplus L(\omega_0).$$

Предложение 2.1 доказано.

3. Формулировка и доказательство основной теоремы

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 3.1. *Пусть g – алгебра Ли типа A_4 над алгебраически замкнутым полем k характеристики p > 5, $L(\lambda)$ ь – простой g-модуль со старшим весом $\lambda\in X_1(T)$. Тогда $H^1(g,L(\lambda))=0$, кроме следующих случаев:*

(i) $H^1(g,L(\lambda))^{(-1)}\approx k$, *если* $\lambda\in\{\omega_{00},\omega_{11},\omega_{13},\omega_{22},\delta_{13},\gamma_{22}\}$ *и* $\omega_0=0$;

(ii) $H^1(g,L(\pi_{23}))^{(-1)}\approx L(\lambda_1+\lambda_2)$, *если* $\omega_0=0$;

(ii) $H^1(g,L(\lambda))^{(-1)}\approx L(\lambda_1)$, *если* $\lambda\in\{\omega_{20},\omega_{22},\mu_{23}\}$ *и* $\omega_0=(p-5)\lambda_1$;

(iii) $H^1(g,L(\lambda))^{(-1)}\approx L(\lambda_2)$, *если* $\lambda\in\{\mu_{21},\delta_{13},\pi_{23}\}$ *и* $\omega_0=(p-5)\lambda_2$;

(vi) $H^1(g,L(\lambda))^{(-1)}\approx L(\lambda_3)$, *если* $\lambda\in\{\mu_{12},\gamma_{22},\pi_{23}\}$ *и* $\omega_0=(p-5)\lambda_3$;

(v) $H^1(g,L(\lambda))^{(-1)}\approx L(\lambda_4)$, *если* $\lambda\in\{\omega_{02},\omega_{13},\mu_{23}\}$ *и* $\omega_0=(p-5)\lambda_4$.

Доказательство. Известно, что [9]

$$H^1(g,L(\lambda))\approx H^1(G_1,L(\lambda)). \qquad (3.1)$$

Для $\lambda\in X_1(T)$ имеет место короткая точная последовательность G-модулей $0\to L(\lambda)\to H^0(\lambda)\to H^0(\lambda)/L(\lambda)\to 0$. Так как $H^0(\lambda)\approx V(-w_0(\lambda))^*$, то $H^0(\lambda)/L(\lambda)\approx$ $\approx V(-w_0(\lambda))^*/L(\lambda)\approx V(-w_0(\lambda))^{1^*}$, и последняя точная последовательность может переписана в виде

$$0\to L(\lambda)\to H^0(\lambda)\to V(-w_0(\lambda))^{1^*}\to 0. \qquad (3.2)$$

Из длинной точной когомологической последовательности G_1-когомологии, соответствующей короткой точной последовательности (3.2), получаем следующую точную последовательность G-модулей:

$$0\to H^0(G_1,V(-w_0(\lambda))^{1^*})\to$$
$$\to H^1(G_1,L(\lambda))\to H^1(G_1,H^0(\lambda)). \qquad (3.3)$$

Когомологии G_1 для индуцированных модулей вычислены в работе [5, 487]

$$H^i(G_1,H^0(w\cdot 0+p\nu))^{(-1)}\approx \qquad (3.4)$$

$$\approx\begin{cases} Ind_B^G(S^{\frac{i-l(w)}{2}}(u^*)\otimes k_\nu), \text{ если } i-l(w) \text{ четно;}\\ 0 \text{ в остальных случаях,}\end{cases}$$

где u – нильпотентная подалгебра алгебры Ли группы G, соответствующая отрицательным корням, $S(u^*)$ – симметрическая алгебра на u, $l(w)$ – длина элемента $w\in W$.

Утверждения теоремы следуют из формул (3.1)–(3.4), предложения 2.1 и принципа связанности 1.2.1. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jantzen J.C.* First cohomology groups for classical Lie algebras // Progress in Math. 1991. V. 95. P. 289-315.

2. *Джумадильдаев А.С.* О когомологии модулярных алгебрЛи // Матем. сборник. 1982. Т. 119(161), вып. 1. С. 127-143.

3. *Ибраев Ш.Ш.* Когомологии ядра Фробениуса для $Sp_4(k)$ // Вестник НАН РК. Сер. физ.-мат. 2010. № 5. В печати.

4. *Ибраев Ш.Ш.* Когомологии ядра Фробениуса для G_2 // Акт. проблемы гумм. и естественных наук. 2010. № 7. В печати.

5. *Jantzen J.C.* Representations of algebraic groups // Pure and Applied Mathematics. V. 131. Boston, 1987. P. 447.

6. *Andersen H.H.* Filtrations of cohomology modules for Chevalley groups // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1983. V. 16. P. 495-528.

7. *Jantzen J.C.* Weyl modules for groups of Lie type // Finite simple groups II, Academic Press. London, 1980. P. 291-300.

8. *O'Halloran J.* Weyl modules and the cohomology of Chevalley groups // Amer. J. Math. 1981. V. 103, N 2. P. 399-410.

9. *Hochschild G.* Cohomology of restricted Lie algebras // Amer. J. Math. 1954. V. 76. P. 555-580.

Резюме

Сипаттамасы $p > 5$ алгебралық тұйық k өрісі үстіндегі A_4 түріндегі Ли алгебрасы үшін жәй модульдердің бірінші когомология группалары есептелген.

Summary

The first cohomology groups of the simple modules for the Lie algebra of type A_4 over an algebraically closed field k of characteristic $p > 5$ are calculated.

Университет «Болашак»,
г. Кызылорда

Поступила 20.09.10г.