УДК 539.3(043.3)

А.Н. ТЮРЕХОДЖАЕВ, А.Ж. СЕЙТМУРАТОВ

ТОЧНЫЕ ЧАСТОТНЫЕ УРАВНЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИИ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ЗАДАННЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ

Если все четыре края прямоугольной пластинки произвольно закреплены, то получить точные частотные уравнения классическим методом не представляются возможным.

Для таких задач можно успешно применять приближённый метод получения частотных уравнений на основе метода декомпозиции, развитого в работах профессора Г.И. Пшеничного [1] для задач статики.

Рассмотрим ряд задач колебания плоских прямоугольных элементов при произвольных граничных условиях по краям элемента с целью определения частот собственных колебаний методом декомпозиции.

Рассмотрим случай для строительной конструкционной детали в виде двухслойной пластины постоянной толщины, которая подвергается нагрузке в форме комбинированных колебаний. Простейшая модель, описывающая такое колебание, может быть представлена уравнением шестого порядка по производным.

Если за основную искомую величину, характеризующую колебания рассматриваемой двухслойной пластины принять функцию поперечного смещения W точек плоскости контакта составляющих, то ограничиваясь в общих уравнениях производными не выше второго порядка для W, получим приближенное уравнение вида:

$$A_0\frac{\partial^4 W}{\partial t^4}+A_1\frac{\partial^2 \Delta W}{\partial t^2}+A_2\Delta^2 W+$$
$$+A_3\frac{\partial^6 W}{\partial t^6}+A_4\frac{\partial^4 \Delta W}{\partial t^4}+A_5\frac{\partial^2 \Delta^2 W}{\partial t^2}+$$
$$+A_6\Delta^3 W=F(x,y,t) \qquad (1)$$

Коэффициенты A_j и F для данного уравнения обоснованы в работе [4]

Если все четыре края произвольно закреплены, то получить трансцендентное уравнение не представляется возможным.

Задача сводится к решению уравнения (1) при правой части равной нулю, при этом вязкоупругие операторы заменяем упругими постоянными.

Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$W(x,y,t)=W_0(x,y)\exp\left(\frac{b_2}{h_2}\xi\cdot t\right) \qquad (2)$$

где ξ - безразмерная частота

и для определения величины W_0 получаем уравнения

$$\Delta^3 W_0+C_0\Delta^2 W_0+C_1\Delta W_0+C_2 W_0=0 \qquad (3)$$

$$C_0=\frac{A_5}{A_6}\left(\frac{b_2\xi}{h_2}\right)^2+\frac{A_2}{A_6};$$

$$C_1=\frac{A1}{A_6}\left(\frac{b_2\xi}{h_2}\right)^2+\frac{A_4}{A_6}\left(\frac{b_2\xi}{h_2}\right)^4;$$

$$C_2=\frac{A_3}{A_6}\left(\frac{b_2\xi}{h_2}\right)^6+\frac{A_0}{A_6}\left(\frac{b_2\xi}{h_2}\right)^4 \qquad (4)$$

Введем новые независимые и зависимые переменные.

$$\alpha=\frac{\pi}{\lambda_1}x;\ \beta=\frac{\pi}{\lambda_2}y;\ W_0=\frac{\lambda_1^4}{\pi^4}\upsilon;$$

$$\lambda=\frac{\lambda_1}{\lambda_2};\ \lambda=\frac{\lambda_1}{\pi}x \qquad (5)$$

В переменных (5) уравнение (3) принимает вид

$$\left[\frac{\partial^6\upsilon}{\partial\alpha^6}+3\lambda^2\frac{\partial^6\upsilon}{\partial\alpha^4\partial\beta^2}+3\lambda^4\frac{\partial^6\upsilon}{\partial\alpha^2\partial\beta^4}+\lambda^6\frac{\partial^6\upsilon}{\partial\beta^6}\right]+$$

$$+C_0\lambda_1^2\left[\frac{\partial^4 \upsilon}{\partial\alpha^4}+2\lambda^2\frac{\partial^{46}\upsilon}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\lambda^4\frac{\partial^4\upsilon}{\partial\beta^4}\right]+$$

$$+C_1\lambda_1^2\left[\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\alpha^2}+\lambda^2\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\beta^2}\right]+C_2\lambda_1^6\upsilon=0 \qquad (6)$$

Следуя методу декомпозиции, рассмотрим три вспомогательные задачи.

Задача 1. Найти решение задачи

$$\frac{\partial^6\upsilon}{\partial\alpha^6}=f^{(1)}(\alpha,\beta)$$

при граничных условиях

$$\upsilon_1=\frac{\partial\upsilon_1}{\partial\alpha}=\frac{\partial^2\upsilon_1}{\partial\alpha^2}=0 \qquad (\alpha=0,\pi) \qquad (7)$$

Задача 2. Найти решение уравнения

$$\lambda^6\frac{\partial^6\upsilon}{\partial\beta^6}=f^{(2)}(\alpha,\beta)$$

при граничных условиях

$$\upsilon_2=\frac{\partial\upsilon_2}{\partial\beta}=\frac{\partial^2\upsilon_2}{\partial\beta^2}=0 \qquad (\beta=0,\pi) \qquad (8)$$

Задача 3. Оставшуюся часть уравнения (6) запишем относительно неизвестной υ_3, удовлетворяющим условиям

$$\left[3\lambda^2\frac{\partial^6\upsilon}{\partial\alpha^4\partial\beta^2}+3\lambda^4\frac{\partial^6\upsilon}{\partial\alpha^2\partial\beta^4}\right]+$$

$$+C_0\lambda_1^2\left[\frac{\partial^4\upsilon}{\partial\alpha^4}+2\lambda^2\frac{\partial^{46}\upsilon}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\lambda^4\frac{\partial^4\upsilon}{\partial\beta^4}\right]+$$

$$C_1\lambda_1^2\left[\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\alpha^2}+\lambda^2\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\beta^2}\right]+$$

$$+C_2\lambda_1^6\upsilon+f^{(1)}+f^{(2)}=0 \qquad (9)$$

Следуя методу декомпозиции, будем полагать, $\upsilon_3=\frac{1}{2}(\upsilon_1+\upsilon_2)$ и условие $\upsilon_1\approx\upsilon_2$ должно приближенно выполняться в заданных точках пластинки.

В дальнейшем произвольные функции $f^{(j)}$ представим как

$$f^{(j)}(\alpha,\beta)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a_{n,m}^{(j)}\sin(\alpha n)\sin(\beta m) \qquad (10)$$

где $a_{n,m}^{(j)}$ произвольные постоянные.

Общее решение первых двух задач имеет вид

$$\upsilon_1=f_1(\alpha,\beta)+\frac{\alpha^5}{5!}\varphi_1(\beta)+\frac{\alpha^4}{4!}\varphi_2(\beta)+$$

$$+\frac{\alpha^3}{3!}\varphi_3(\beta)+\frac{\alpha^2}{2!}\varphi_4(\beta)+\alpha\varphi_5(\beta)+\varphi_6(\beta) \qquad (11)$$

$$\lambda^6\upsilon_2=f_2(\alpha,\beta)+\frac{\beta^5}{5!}\psi_1(\beta)+\frac{\beta^4}{4!}\psi_2(\beta)+$$

$$+\frac{\beta^3}{3!}\psi_3(\beta)+\frac{\beta^2}{2!}\psi_4(\beta)+\beta\psi_5(\beta)+\psi_6(\beta)$$

где φ_j,ψ_j произвольные функции и зависят от граничных условий по краям, а функции $f_1(\alpha,\beta)$, в общих решениях (11) равны

$$f_1(\alpha,\beta)=-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_{n,m}^{(1)}}{n^6}\sin(\alpha n)\sin(\beta m)$$

$$f_2(\alpha,\beta)=-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_{n,m}^{(2)}}{m^6}\sin(\alpha n)\sin(\beta m) \qquad (12)$$

Исходя из граничных условий для определения $\varphi_j(\beta),\psi_j(\alpha)$ и выражений (12) находим

$$\varphi_1=\frac{360}{\pi^4}\left[\frac{\partial f_1}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0}+\frac{\partial f_1}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=\pi}\right];$$

$$\varphi_2=-\frac{24}{\pi^3}\left[8\frac{\partial f_1}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0}+7\frac{\partial f_1}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=\pi}\right]$$

$$\varphi_3=\frac{12}{\pi^4}\left[3\frac{\partial f_1}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0}+2\frac{\partial f_1}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=\pi}\right]; \quad \varphi_4=0;$$

$$\varphi_5=-\frac{\partial f_1}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0}; \quad \varphi_6=0 \qquad (13)$$

$$\psi_1 = \frac{360}{\pi^4}\left[\frac{\partial f_1}{\partial \beta}\bigg|_{\beta=0} + \frac{\partial f_1}{\partial \beta}\bigg|_{\beta=\pi}\right];$$

$$\psi_2 = -\frac{24}{\pi^3}\left[8\frac{\partial f_1}{\partial \beta}\bigg|_{\beta=0} + 7\frac{\partial f_1}{\partial \beta}\bigg|_{\beta=\pi}\right]$$

$$\psi_3 = \frac{12}{\pi^2}\left[3\frac{\partial f_1}{\partial \beta}\bigg|_{\beta=0} + 2\frac{\partial f_1}{\partial \beta}\bigg|_{\beta=\pi}\right];$$

$$\psi_4 = 0; \quad \psi_5 = -\frac{\partial f_1}{\partial \beta}\bigg|_{\beta=0}; \quad \psi_6 = 0$$

при этом

$$\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_{n,m}^{(1)}}{n^5}\sin(\beta m)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=\pi} = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a_{n,m}^{(1)}}{n^5}\sin(\beta m)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \beta}\bigg|_{\alpha=0} = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_{n,m}^{(1)}}{n^5}\sin(\alpha n)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \beta}\bigg|_{\alpha=\pi} = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a_{n,m}^{(1)}}{n^5}\sin(\alpha n) \quad (14)$$

Если в рядах (12) ограничиться только первыми слагаемыми, то из условия $\upsilon_1 = \upsilon_2$ при $(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{2}$ получаем $a_{11}^{(1)} = \lambda^{-6}a_{11}^{(2)}$. Используя условия (7), (8) и уравнение (9) относительно υ_3 и пологая $\upsilon_3 = \frac{1}{2}[\upsilon_1 + \upsilon_2]$, получаем частотное уравнение при $(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{2}$

$$2\lambda_1^6(1-\frac{5\pi}{16})C_2 - \lambda_1^4(1+\lambda^2)(2-\frac{3}{\pi}-\frac{5\pi}{16})C_1 +$$

$$+\lambda_1^2\left[(1+\lambda^4)(2-\frac{24}{\pi^3}-\frac{5\pi}{16}) + \right.$$

$$\left. +4\lambda^2(1-\frac{3}{\pi})\right]C_0 - \left[2(1+\lambda^6) + \right.$$

$$\left. +3\lambda^2(1+\lambda^2)(2-\frac{3}{\pi}-\frac{24}{\pi^3})\right] = 0$$

Полученное частотные уравнение позволяет определять частоты собственных колебании двухслойной пластинки при заданных механических и геометрических характеристик являющимися основными элементами многих строительных конструкций .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пшеничнов Г.И.* Метод декомпозиции решения уравнения и краевых задач. -М.: ДАН. СССР, 1985, т 282, №4, с. 792-794.

2. *Пшеничнов Г.И.* Решение некоторых задач строительной механики методом декомпозиции.-«Строительная механика и расчет сооружений»,1986, №4, с. 12-17 .

4. *Сеитмуратов А.Ж.* Приближенный метод декомпозиций в теории колебания прямоугольных пластин –«Актуальные проблемы механики и машиностроения» КазНТУ г. Алматы. 2005 г.

Резюме

Қатпарлы пластинкалардың өзіндік жиілік терделіс теңдеуі құрылыс конструкциялары үшін маңызды орын алады. Бұл есепте механикалық және геометриялық сипаттамамасы үшін екі қатпарлы пластинканың өзіндік теңдеуін декомпозиция әдісімен шешеміз.

Summary

Obtain the frequency equation of natural vibrations of the plate layer are the main elements of the seismic stability of building structures.

The problem is solved by the method of obtaining the approximate frequency equations based on the decomposition method