УДК 517.956

А.А. ТУРГАНБАЕВ

ЗАДАЧА ДАРБУ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ ЧАПЛЫГИНА

В работе доказана корректность задачи Дарбу для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений четного порядка с оператором Чаплыгина.

Пусть D_0 - конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $x=(x_1,...,x_m,t)$, ограниченная поверхностями $|x|=\int_0^t\sqrt{g(\xi)}d\xi$, $|x|=1-\int_0^t\sqrt{g(\xi)}d\xi$ и плоскостью $t=0$, $0\le t\le t_0$; $t_0:\frac{1}{2}=\int_0^t\sqrt{g(\xi)}d\xi$, где $|x|$ -длина вектора $x=(x_1,...,x_m)$.

Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_0 области D_0, обозначим через S_0, S_1 и S соответственно.

В области D_0 рассмотрим вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения четного порядка с оператором Чаплыгина

$$L^n u\equiv(g(t)\Delta_x-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\sum_{i=1}^m a_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}+,$$

$$+b(x,t)\frac{\partial}{\partial t}+c(x,t))^n u=0 \qquad (1)$$

где $g(t)>0$ при $t>0$ и $g(0)=0,\ g(t)\in C([0,t_0])\cap C^2((0,t_0))$, а $1<n$ - целое число, Δ_x -оператор Лапласа по переменным $x_1,...,x_m, m\ge 2$, на важность исследования которых обратил внимание еще А.В.Бицадзе ([1]).

Рассмотрим многомерный аналог задачи Дарбу для уравнения (1) ([2]).

Задача 1. Найти в области D_0 решения уравнения (1) из класса $C^{2n-1}(\overline{D_0})\cap C^{2n}(D_0)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$L^j u|_S=\tau_j(x),\quad L^j u|_{S_1}=\varphi_j(x),\quad j=\overline{0,n-1}, \qquad (2)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}L^j u|_S=\nu_j(x),\quad L^j u|_{S_1}=\varphi_j(x),\quad j=\overline{0,n-1}. \qquad (3)$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,...,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,...,\theta_{m-1}, r\ge 0, 0\le\theta_1<2\pi, 0<\theta_i<\pi, i=2,...,m-1$, сохранив обозначения, использованные в [3].

Пусть Ω_0 - проекция области D_0 на плоскость (r,t) с границами $\Gamma_0: r=\int_0^t\sqrt{g(\xi)}d\xi$, $\Gamma_1: r=1-\int_0^t\sqrt{g(\xi)}d\xi$ и $\Gamma: t=0,\ 0\le r\le 1$.

Пусть далее $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ - система линейно независимых сферических функций порядка $n, 1\le k\le k_n, (m-2)!n!k_n=(n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta=(\theta_1,...,\theta_{m-1}), W_2^l(S), l=0,1,...$ - пространства Соболева, а $\widetilde{S}=\left\{(r,\theta)\in S, 0<r<\frac{1}{2}\right\}$. Через $\widetilde{a}_{in}^k(r,t), a_{in}^k(r,t), \widetilde{b}_n^k(r,t), \widetilde{c}_n^k(r,t), \rho_n^k, \overline{\tau}_{jn}^k(r,t), \overline{\varphi}_{jn}^k(r,t)$ обозначим коэффициенты разложения по сферическим функциям $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ соответственно функций

$$a_i(r,\theta,t)\rho(\theta), a_i\frac{x_i}{r}\rho, b(r,\theta,t)\rho, c(r,\theta,t)\rho, \rho(\theta),$$

$$\tau_j(r,\theta), \nu_j(r,\theta), \varphi_j(r,\theta), i=1,...,m, j=\overline{0,n-1}.$$

Пусть

$a_i(x,t), b(x,t), c(x,t) \in W_2^l(D_0) \cap C^{2n-1}(\overline{D_0})$,

$i = 1,...,m,\ l \geq 2n+m-2$. Тогда имеет место

Теорема 1. Если

$\tau_j(r,\theta) = r^4 \tau_j^*(r,\theta), \nu_j(r,\theta) = r^4 \nu_j^*(r,\theta)$,

$$\varphi_j(r,\theta) = \left(r - \frac{1}{2}\right)^{(m+5)/2} \varphi_j^*(r,\theta),$$

$\tau_j^*(r,\theta), \nu_j^*(r,\theta) \in W_2^l(S)$,

$\varphi_j^*(r,\theta) \in W_2^l(S \setminus \widetilde{S}),\ j = \overline{0, n-1},\ l > (3n+3m)/2$,

то задача 1 однозначно разрешима.

Докажем теорему 1 индукцией по n.

Пусть n=2. Если ввести новую неизвестную функцию $\vartheta(x,t) = Lu$, то задача 1 распадается на две следующие задачи.

Задача 2. Найти в области D_0 решение уравнения $L\vartheta = 0$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\vartheta\big|_S = \tau_1(x), \quad \vartheta\big|_{S_1} = \varphi_1(x),$$

или

$$\vartheta_t\big|_S = \nu_1(x), \quad \vartheta\big|_{S_1} = \varphi_1(x).$$

Задача 3. Найти в области D_0 решение уравнения

$$Lu = \vartheta(x,t), \tag{4}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_S = \tau_0(x), \quad u\big|_{S_1} = \varphi_0(x), \tag{5}$$

или

$$u_t\big|_S = \nu_0(x), \quad u\big|_{S_1} = \varphi_0(x). \tag{6}$$

В работе [4] показано, что задача 2 имеет единственное решение, которое имеет вид

$$\vartheta(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \overline{\vartheta}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{7}$$

где функции $\overline{\vartheta}_n^k(r,t)$ находятся из двумерных задач Дарбу.

Теперь будем доказывать теорему 1. Сначала докажем единственность решения задачи 1. Пусть $\tau_j(x) \equiv 0, \nu_j(x) \equiv 0, \varphi_j(x) \equiv 0,\ j = 0,1$. Тогда из [4] вытекает, что решение задачи 2 $\vartheta(x,t) \equiv 0$. Откуда следует также, что решение задачи 3 $u(x,t) \equiv 0$.

Теперь переходим к разрешимости задачи 1. Сначала рассмотрим задачу (1),(2) и для её решения достаточно решить задачу (4),(5), где $\vartheta(x,t)$ определяется из (7). Решение $u(r,\theta,t)$ ищем в виде ряда

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \overline{u}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{8}$$

где функции $\overline{u}_n^k(r,t)$ – функции, которые будут определены ниже.

Тогда, аналогично, как в [3,4], с учётом (7) для $\overline{u}_n^k(r,t)$ получим ряд

$$\begin{aligned} & g(t)\rho_0^1 \overline{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \overline{u}_{0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r} g(t)\rho_0^1 + \sum_{i=1}^{m} a_{i0}^1\right)\overline{u}_{0r}^1 + \\ & + \widetilde{b}_0^1 \overline{u}_{0t}^1 + \widetilde{c}_0^1 \overline{u}_0^1 - \rho_0^1 \overline{\vartheta}_0^1 + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \Big\{ g(t)\rho_n^k \overline{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \overline{u}_{ntt}^k + \\ & + \left(\frac{m-1}{r} g(t)\rho_n^k + \sum_{i=1}^{m} a_{in}^k\right)\overline{u}_{nr}^k + \widetilde{b}_n^k \overline{u}_{nt}^k + \\ & + \left[\widetilde{c}_n^k - \frac{\lambda_n g(t)\rho_n^k}{r^2} + \sum_{i=1}^{m}\left(\widetilde{a}_{in-1}^k - n a_{in}^k\right)\right]\overline{u}_n^k - \\ & - \rho_n^k \overline{\vartheta}_n^k \Big\} = 0, \quad \lambda_n = n(n+m-2). \end{aligned} \tag{9}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$g(t)\rho_0^1 \overline{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \overline{u}_{0tt}^1 + \frac{m-1}{r} g(t)\rho_0^1 \overline{u}_{0r}^1 = \rho_0^1 \overline{\vartheta}_0^1, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} & g(t)\rho_1^k \overline{u}_{1rr}^k - \rho_1^k \overline{u}_{1tt}^k + \frac{m-1}{r} g(t)\rho_1^k \overline{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2} g(t)\rho_1^k \overline{u}_1^k = \\ & = \rho_1^k \overline{\vartheta}_1^k - \\ & - \frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=0}^{m} a_{i0}^1 \overline{u}_{0r}^1 + \widetilde{b}_0^1 \overline{u}_{0t}^1 + \widetilde{c}_0^1 \overline{u}_0^1\right), \\ & n = 1, k = \overline{1, k_1}, \end{aligned} \tag{11}$$

$$g(t)\rho_n^k\overline{u}_{nrr}^k-\rho_n^k\overline{u}_{ntt}^k+\frac{m-1}{r}g(t)\rho_n^k\overline{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}g(t)\rho_n^k\overline{u}_n^k=,$$

$$=\rho_n^k\overline{\vartheta}_n^k-$$

$$-\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^{m}a_{in-1}^k\overline{u}_{n-1r}^k+\widetilde{b}_{n-1}^1\overline{u}_{n-1t}^k+\right.$$

$$\left.+\left[\widetilde{c}_{n-1}^k+\sum_{i=1}^{m}(\widetilde{a}_{in-2}^k-(n-1)a_{in-1}^k)\right]\overline{u}_{n-1}^k\right\},$$

$$k=\overline{1,k_n},n=2,3,.... \tag{12}$$

Далее, из краевого условия (5), в силу (8) будем иметь

$$\overline{u}_n^k(r,t)\big|_{\Gamma}=\overline{\tau}_{0n}^k(r),\quad \overline{u}_n^k(r,t)\big|_{\Gamma_1}=\overline{\varphi}_{0n}^k(r),$$

$$k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,.... \tag{13}$$

Нетрудно показать, что если $\{\overline{u}_n^k\}$, $k=\overline{1,k_n},n=0,1,...$ - решение системы (10)–(12), то оно является и решением уравнения (9).

Таким образом, задача (4),(5) сведена к системе задач Дарбу в области Ω_0 для уравнений (10) – (12). Теперь будем искать решение этих задач.

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (10) – (12) можно представить в виде

$$g(t)\overline{u}_{nrr}^k-\overline{u}_{ntt}^k+\frac{m-1}{r}g(t)\overline{u}_{nr}^k-$$

$$-\frac{\lambda_n}{r^2}g(t)\overline{u}_n^k=\overline{\vartheta}_n^k+\overline{f}_n^k(r,t), \tag{14}$$

где $\overline{f}_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\overline{f}_0^1(r,t)\equiv 0$.

Произведя в (14) замену переменных $\overline{u}_n^k(r,t)=r^{(1-m)/2}u_n^k(r,t)$ и положив затем $r=r,y=\left(\frac{3}{2}\int_0^t\sqrt{g(\xi)}d\xi\right)^{2/3}$, получим уравнение

$$yu_{nrr}^k-\overline{u}_{nyy}^k+\frac{\overline{\lambda_n}}{r^2}u_n^k-b(y)u_{ny}^k=f_n^k(r,y),$$

$$\overline{\lambda_n}=\frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda_n]}{4},\quad b(y)=\frac{1}{2g}\left(\frac{dg}{dy}-\frac{g}{y}\right), \tag{15}$$

$$f_n^k(r,y)=r^{(m-1)/2}\frac{[\overline{\vartheta}_n^k(r,t)+f_n^k(r,t)]}{y^2}.$$

Полагая $u_n^k=\omega_n^k\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^t b(\xi)d\xi\right]$, уравнение (15) приводим к виду

$$y\omega_{nrr}^k-\omega_{nyy}^k+\frac{\overline{\lambda_n}}{r^2}\omega_n=c(y)\omega_n^k+\overline{f}_n^k(r,y),$$

$$c(y)=-\frac{1}{4}\left(b^2+2b_y^{'}\right)\in C(y>0),\ \overline{f}_n^k(r,y)=$$

$$=f_n^k(r,y)\exp\left[\frac{1}{2}\int_0^y b(\xi)d\xi\right]. \tag{16}$$

Уравнение (16), в свою очередь, с помощью замены переменных $r=r,x_0=\frac{2}{3}y^{3/2}$ переходит в уравнение

$$\omega_{nrr}^k-\omega_{nx_0x_0}^k-\frac{1}{3x_0}\omega_{nx_0}^k+\frac{\overline{\lambda_n}}{r^2}\omega_n^k=g_n^k(r,x_0), \tag{17}$$

$$g_n^k(r,x_0)=\left(\frac{3x_0}{2}\right)^{-2/3}\left\{\overline{f}_n^k\left[r,\left(\frac{3x_0}{2}\right)^{2/3}\right]+\right.$$

$$\left.+c\left[\left(\frac{3x_0}{2}\right)^{2/3}\right]\omega_n^k\left[r,\left(\frac{3x_0}{2}\right)^{2/3}\right]\right\}.$$

При этом краевое условие (13) запишется в виде

$$\omega_n^k(r,0)=\tau_{0n}^k(r),\ 0\le r\le 1,\ \omega_n^k(r,1-r)=,$$

$$=\varphi_{0n}^k(r),\ \frac{1}{2}\le r\le 1 \tag{18}$$

$$\tau_{0n}^k(r)=r^{(m-1)/2}\overline{\tau}_{0n}^k(r),\ \varphi_{0n}^k(r)=r^{(m-1)/2}\overline{\varphi}_{0n}^k(r),$$

$$k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,....$$

В [4-6] показано, что задача (17), (18) однозначно разрешима.

Следовательно, сначала решив задачу (10), (13), а затем (11), (13) и т.д., найдем последовательно все $\overline{u}_n^k(r,t)$, $k=\overline{1,k_n},n=0,1,...$.

Таким образом, задача (4),(5) имеет решение вида

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}r^{(1-m)/2}u_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{19}$$

где $u_n^k(r,t)$ определяются из задачи (17),(18).

Как и в [3,6], нетрудно показать, что полученное решение вида (19) принадлежит искомому классу.

Используя результаты [4-6], можно доказать, что задача (4),(6) (т.е.задача (1),(3)) также имеет решение вида (7).

Теорема 1 при n=2 доказана.

Пусть теперь теорема 1 верна при n=к . Докажем ее при n=к+1. В этом случае задачу 1 можно разбить на две следующие задачи.

Задача 4. Найти в области D_0 решение уравнения $L^k\vartheta = 0$, удовлетворяющее краевым условиям

$$L^j\vartheta\big|_S = \tau_{j+1}(x), \quad L^j\vartheta\big|_{S_1} = \varphi_{j+1}(x), \quad j = \overline{0,k-1},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}L^j\vartheta\big|_S = \nu_{j+1}(x), \quad L^j\vartheta\big|_{S_1} = \varphi_{j+1}(x), \quad j = \overline{0,k-1}.$$

Задача 5. Найти в области D_0 решение уравнения (4), удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_S = \tau_0(x), \quad u\big|_{S_1} = \varphi_0(x),$$

или

$$u_t\big|_S = \nu(x), \quad u\big|_{S_1} = \varphi_0(x).$$

По предположению, при n=к задача 4 имеет единственное решение $\vartheta(r,\theta,t)$, которое можно представить в виде (7).

Далее, как показано ранее, задача 5 однозначно разрешима, при этом $\vartheta(r,\theta,t)$ определяется из (7).

Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М.:Изд-во АН СССР, 1959.162с.

2. *Protter M.H.* New voundary problems for the wave equation and equations of mixed type //J.Rational Mech. and Analysis.1954.v.3,№ 4.p.435-446

3. *Алдашев С.А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений.Алматы: Гылым, 1994. 170с.

4. *Алдашев С.А.* Задачи Дарбу - Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений // Известия вузов. Математика.2006. №9(32),с.3-9

5. *Алдашев С.А.* Критерий существования собственных функций спектральной задачи Дарбу-Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений //Математический журнал.Алматы: ИМ МОН РК. 2006. т.6,№2(20). с.23-32

6. *Алдашев С.А.* Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения.Орал.2007.139с.

Резюме

Мақалада азғындалған Чаплыгин операторы бар көп өлшемді жұп дәрежелі гиперболалық теңдеулерге Дарбу есебінің шешімінің бар және жалғыздығы дәлелденген.

Summary

It is proved in the work, that Darboux tasf for degerate multidimensional hyperbolik equations of the even order with Chapligin operator was posed corretly.

Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова г.Актюбинск

Поступила 09.04.2008