УДК 621.01

Г.У.УАЛИЕВ, С.У. ДЖОЛДАСБЕКОВ, Б.ЖУРСЕНБАЕВ, А.САРБАСОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПОДЪЕМНОЙ МАШИНЫ

Для теоретического исследования динамики подъемных машин, определения конструктивных параметров необходимо иметь расчетные механические модели. Этот выбор расчетной модели подъемной машины в каждом конкретном случае определяется кинематической схемой подъемного механизма и механическими свойствами его деталей и узлов. В данной статье для динамического исследования механизма подъемника использованы уравнения Лагранжа второго рода.

Грузоподъемное устройство (рис.1) предназначено для проведения строительно-монтажных и ремонтных работ гражданских и промышленных сооружений (цехов, вокзалов, аэропортов, жилых домов, общественных зданий и.т.д.) [1].

Для изучения динамики подъемных машин необходимо иметь расчетные механические модели, с достаточной точностью описывающие свойства реальных машин. Выбор расчетной модели в каждом конкретном случае определяется кинематической схемой подъемной машины и механическими свойствами (инерционными, упругими, диссипативными и.т.п.) его деталей, узлов, типом и характеристиками приводов, а также необходимой точностью проводимых расчетов.

В наиболее простых моделях считается, что все детали механизма подъёмника абсолютно твердые тела. Кинематические пары предполагаются идеальными, трением в них пренебрегается. Эти модели с приемлемой степенью точности отражают свойства реальных машин. [1,2].

В исследовании динамики механических систем одним из возможных методов описания динамической модели является метод, основанный на использовании уравнений Лагранжа второго рода. Этот метод применим для любых голономных механических систем с конечным числом степеней свободы, в том числе и для систем, содержащих деформируемые элементы (пружины, упругие стержни и т.п.), если можно пренебречь их инерционностью.

В принципе, в качестве уравнения движения механизма подъемника, кинематическая схема которого показана на рисунке 2, могут применяться другие формы уравнений динамики: уравнения Гамильтона, уравнение Раусса, уравнение Эйлера-Лагранжа и др. [3,4]. Уравнения движения могут быть составлены также путем применения к отдельным элементам механизма теорем механики об изменении количества движения и момента количества движения. Существует также подходы к описанию динамики подъемников, не требующие составления дифференциальных уравнений движения, а основанные на непосредственном использовании вариационных принципов механики [2,5].

В случае многозвенных подъемных машин реализация любого из методов составления уравнений движения приводит к необходимости выполнять утомительные аналитические выкладки. Сами же уравнения получаются очень громоздкими. В связи с этим перспективным представляется использование ЭВМ для проведения аналитических преобразований при составлении уравнений движения.

Вывод уравнений динамики движения методом Лагранжа-Эйлера отличается простотой и единством подхода. Этот подход приводит к системе нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка и отражают эффекты, связанные с действием сил инерции, обусловленных ускоренным движением звеньев, действием кориолисовых и центробежных сил, а также действием сил тяжести. Эти уравнения обеспечивают строгое описание динамики состояния механизма и используются для разработки усовершенствованных законов управления в пространстве присоединенных переменных. Совместное использование матричного преобразования Денавита-Хартенберга и метода Лагранжа приводит к компактной векторно-матричной форме урав-

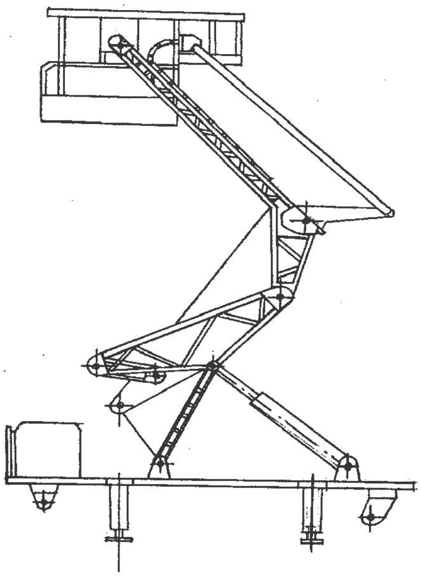

Рис 1. Грузоподъемное устройство

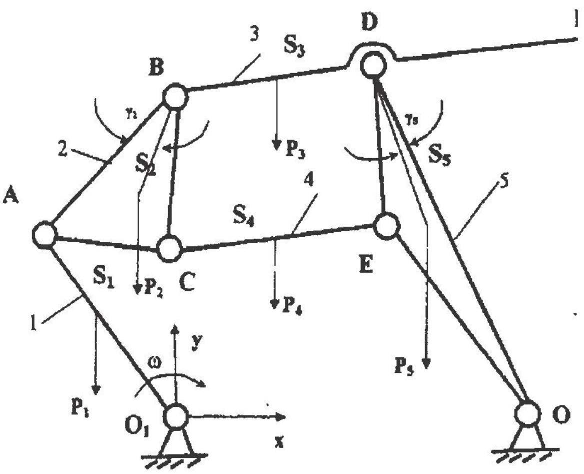

Рис. 2 Кинематическая схема подъемника

нений движения, удобной для аналитического исследования и допускающей реализацию на ЭВМ. Если известны решения обратной задачи кинематики, то известны и обобщенные координаты, позволяющие придать рабочей точке положение и ориентацию относительно базовой системы координат.

Уравнения динамики движения механической системы методом Лагранжа-Эйлера основаны на использовании уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Qi\,, \quad i=1,\ldots,5 \qquad (1)$$

где L – функция Лагранжа, L=K-*П*; K – кинетическая энергия механической системы; *П* – потенциальная энергия механической системы; qi – обобщенные координаты механической системы; $\dot{q}$ i – первая производная по времени обобщенных координат; Qi – обобщенные силы (или моменты), создаваемые в i-том сочленении для реализации заданного движения i-го звена.

Для того чтобы воспользоваться уравнениями Лагранжа-Эйлера, необходимо знать кинетическую энергию рассматриваемой физической системы, а следовательно, и скорости всех ее точек с учетом движения всех сочленении механизма подъемника.

Зная скорость произвольной точки каждого звена механизма подъемника, найдем кинетическую энергию i-го звена. Обозначим через K_i кинетическую энергию элемента массы dm i-го звена. Тогда

$$dK_i=1/2(x^2+y^2+z^2)dm=1/2\text{след}(\dot{T}_i J_i \dot{T} T_i)dm =$$
$$= 1/2tr(\dot{T}_i J_i \dot{T} T_i)dm \qquad (2)$$

Здесь вместо скалярного произведения используется оператор tr (след матрицы), что в дальнейшем позволит перейти к матрице инерции J_i i-го звена. Подставляя в выражение (2) значение v_i, получаем:

$$K=\Sigma K_i = 1/2\Sigma tr(\Sigma\Sigma U_{ip} J_i UT_i r\ \dot{q}_p\ \dot{q}\, r)=$$
$$= 1/2\Sigma\Sigma\Sigma[tr(U_{ip} J_i UT_i r)\dot{q}_p \dot{q}\, r] \qquad (3)$$

следовательно, кинетическая энергия механизма подъемника равна арифметической сумме кинетической энергии всех его звеньев:

$$K=1/2\Sigma tr(\dot{T}_i J_i \dot{T}_i T), \qquad (4)$$

где $J_i = \begin{bmatrix} J_{XX}^{(i)} & J_{XY}^{(i)} & J_{XZ}^{(i)} & m_i x_i^* \\ J_{YX}^{(i)} & J_{YY}^{(i)} & J_{YZ}^{(i)} & m_i y_i^* \\ J_{ZX}^{(i)} & J_{ZY}^{(i)} & J_{ZZ}^{(i)} & m_i z_i^* \\ m_i x_i^* & m_i y_i^* & m_i z_i^* & m_i \end{bmatrix}$ – матрица

инерции i-го звена, (5)

m_i – масса i-го звена; x^*_i, y^*_i, z^*_i – координаты центра тяжести i-го звена в собственной системе координат; $J(i)_{xx}$, $J(i)_{yy}$, J(*i*)*zz* – элементы тензора инерции i-го звена относительно собственных осей.

Величины J_i зависят только от распределения массы i-го звена подъемника в i-той системе координат и не зависят ни от положения, ни от скорости звеньев. Это позволяет, вычислив матрицы J_i, использовать полученные значения в дальнейшем для вычисления кинетической энергии механизма подъемника.

Используя полученные выражения, для первого звена напишем:

$$K_1=1/2\Sigma t2(\dot{T}_1 J_1 \dot{T}_1 T), \quad (6)$$

где $\dot{T}_1=U_{11}\dot{q}_1=HA^{\circ}_1\dot{q}_1=\begin{bmatrix} -S_{11} & -C_{11} & 0 & -a_{11}S_{11} \\ C_{11} & -S_{11} & 0 & a_{11}C_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\dot{q}_1$,

или

$$K_1=1/2\mathrm{tr}\begin{bmatrix} -S_{11}q_1 - C_{11}q_1 & 0 & -a_{11}S_{11}q_1 & \\ -C_{11}q_1 - S_{11}q_1 & 0 & -a_{11}S_{11}q_1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} J^1_{XX} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J^1_{YY} & 0 & m_1y^*_1 \\ 0 & 0 & J^1_{ZZ} & 0 \\ 0 & 0 & m_1y^*_1 & m_1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -S_{11}q_1 & C_{11}q_1 & 0 & 0 \\ -C_{11}q_1 & -S_{11}q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{11}S_{11}q_1 & -a_{11}C_{11}q_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}=$$

$$=(2J^1_z+m_1a^2_{11})\dot{q}^2_1/2.$$

Таким образом,

$$K_1=(2J^1_z+m_1a^2_{11})\dot{q}^2_1/2, \quad (7)$$

причем J^I_z получено с учетом $J^I_{xx}+J^I_{yy}=J^5_z$, где J^5_z – осевой момент инерции звена 1 относительно оси z_1.

Аналогично, для второго звена механизма,

$$K_2=(2J^1_Z+m_1a^2_{11})\dot{q}^2_1/2. \quad (8)$$

$$K_3=1/2(2J^3_z+m_3a^2_3)\dot{q}^2_1/2, \text{где } a_3=a_{31}+a_{32}. \quad (9)$$

(9) – кинетическая энергия третьего звена механизма.

Кинетическая энергия четвертого звена будет:

$$K_4=1/2(2J^4_z+m_4a^2_4)\dot{q}^2_1/2.$$

Для пятого звена находим

$$K_5=1/2(2J^5_z+m_5a^2_{53})\dot{q}^2_1/2.$$

Полную кинетическую энергию механизма подъемника получаем складывая арифметически K_1, K_2, K_3, K_4 и K_5:

$$K_M=\left(J_z^{\,1}+\frac{m_1a_{11}^{\,2}}{2}+J_z^{\,2}+\frac{m_2a_{22}^{\,2}}{2}+J_z^{\,3}+\frac{m_3a_3^{\,2}}{2}+\right.$$

$$+J_z^{\,4}+\frac{m_4a_4^{\,2}}{2}+J_z^{\,5}+\frac{m_5a_{53}^{\,2}}{2}+J_z^{\,6}+$$

$$\left.+\frac{m_6a_6^{\,2}}{2}+J_z^{\,7}\right)q_1^{\,2} \quad (10)$$

Полная потенциальная энергия, связанная с весом механизма подъемника, определяется как сумма всех потенциальных энергий отдельных его звеньев. Потенциальная энергия i-го звена механизма в поле сил тяжести

$$\Pi i = Pi\, y^*_o, \quad (11)$$

где Pi – сила тяжести i-го звена, y^*_o – координата по оси у центра тяжести i-го звена.

Для первого звена:

$$\mathbf{\Pi_1}=-m_1[-g(y^*_1 c_{11}-a_{11}s_{11})]=\mathbf{P_1}(y^*_1 c_{11}+a_1 s_{11}).$$

Для вычисления потенциальных энергий остальных звеньев нужны матрицы T_2, T_3, T_4 и T_5.

Тогда потенциальные энергии для этих звеньев будут

$\mathbf{\Pi_2}=\mathbf{P_2}[y^*_2(-S_{11}S_{22}+C_{11}C_{22})+a_{22}(\mathbf{S_{11}}C_{22+}S_{22}C_{11})+a_{11}S_{11}]$;

$\mathbf{\Pi_3}=\mathbf{P_3}[(a_{31}C_{31}-S_{31})(S_{11}C_{21}+C_{11}S_{21})-(a_{31}S_{31}+C_{31})(S_{11}S_{21}-C_{11}C_{21})+(a_{11}+a_{21})S_{11}+a_{21}C_{11}S_{21}]$;

$\mathbf{\Pi_4}=\mathbf{P_4}[(a_{11}C_{11}-S_{11})(S_{11}C_{22}+C_{11}S_{22})+(a_4S_4+C_4)(-S_{11}S_{22}+C_{11}C_{22})+(a_{11}+a_{22})S_{11}+a_{22}C_{11}]$;

$\mathbf{\Pi_5}=\mathbf{P_5}[a_{53}(S_{53}+C_{53})[C_4(S_{11}C_{22}+C_{11}S_{22})+S_4(-S_{11}S_{22}+C_{11}C_{22})]-S_4(S_{53}-C_{53})(C_{11}C_{22}-S_{11}S_{22})-C_4(S_{53}-C_{53})(S_{11}C_{22}+C_{11}S_{22})+a_4[C_4(S_{11}C_{22}+C_{11}S_{22})+S_4(-S_{11}S_{22}++C_{11}C_{22})+a_{22}(S_{11}C_{22}+C_{11})+a_{11}S_{11}$.

Суммируя, получаем полную потенциальную энергию механизма подъемника:

$$\mathbf{\Pi_м}=\mathbf{P_1}(-y^*_1S_{11}+a_{11}C_{11})\dot{\theta}_{11}+\mathbf{P_2}[y^*_2(-C_{11}S_{22}+S_{11}C_{22})+a_{22}(C_{11}C_{22}+S_{22}S_{11})+a_{11}C_{11}]\dot{\theta}_{11}+$$
$$+\mathbf{P_3}[(a_{31}C_{31}-S_{31})(C_{11}C_{21}-S_{11}S_{21})-(a_{31}S_{31}+C_{31})(C_{11}S_{21}+S_{11}C_{21})+(a_{11}+a_{21})C_{11}-a_{21}S_{11}S_{21}]\dot{\theta}_{11}+\mathbf{P_4}[(a_4C_4S_4)(C_{11}C_{22}+C_{11}S_{22})+$$
$$+(a_4S_4+C_4)(-C_{11}S_{22}-S_{11}C_{22})+(a_{11}+a_{22})C_{11}+a_{22}S_{11}]\dot{\theta}_{11}+\mathbf{P_5}[a_{53}(S_{53}+C_{53})[C_4(C_{11}C_{22}-$$
$$-S_{11}S_{22})+S_4(-C_{11}S_{22}+S_{11}C_{22})]-S_4(S_{53}-C_{53})(-S_{11}C_{22}-C_{11}S_{22})-C_4(S_{53}-C_{53})(C_{11}C_{22}+S_{11}S_{22})+$$

$+a_4[C_4(C_{11}C_{22}+S_{11}S_{22})+S_4(-S_{11}S_{22}+S_{11}C_{22})+$
$+a_{22}(C_{11}C_{22}-S_{11})+a_{11}C_{11}]\dot{\theta}_{11}$. (12)

Полученные выражения кинетической и потенциальной энергий для подъемного механизма, подставляя в формулу (1), получаем уравнения движения его механической системы.

Дальнейшие преобразования нацелены на то, чтобы записать уравнение (1) в матричном виде, удобном для программирования. Уравнения движения механизма представляют собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Эти уравнения учитывают все действующие на звенья механизма подъемника силы и моменты: инерциальные, центробежные, кориолисовые и гравитационные. Для анализа свободных колебаний механической системы механизма относительно некоторой конфигурации при полностью остановленном приводе, т.е. приравнивая силы (моменты) к нулю, после некоторых преобразований можно привести в общем виде к однородным уравнениям второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\mathbf{A}\ddot{q} + \mathbf{C}q = 0, \qquad (13)$$

где **А** – матрица инерционных коэффициентов; **С** – матрица жесткостных коэффициентов.

Общее решение системы дифференциальных уравнений (13) записывается в виде суммы частных решений

$$q(t) = \sum_{i=1}^{5} a_i b^i \sin(\omega_i t + \delta_i), \qquad (14)$$

где b^i – амплитудный вектор; ω_i – частота колебаний; δ_i – начальная фаза колебаний.

Здесь a_i, δ_i – произвольные постоянные, определяемые из начальных условий. Начальные условия при свободных колебаниях в общем случае неизвестны. Для расчета возьмем начальные условия

$$q_o = 0, \quad \dot{q}_o = 0,$$

где q_o определяют из условия статического равновесия для заданной конфигурации.

Формула (14) описывает свободные колебания звеньев механизма подъемника.

Решение проводилось численно по методу Рунге-Кутте с автоматическим выбором шага и контролем точности по стандартной программе на универсальном языке BASIC с помощью ПЭВМ . Шаг численного интегрирования выбирался значительно меньше, чем период свободных колебаний конструкции подъемного механизма.

Подставив (14) в (13), получим систему линейных уравнений относительно компонента вектора **b**:

$$(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{A})\,\mathbf{b} = 0. \qquad (15)$$

Приравнивая к нулю определитель этой системы, получим характеристическое уравнение

$$\det(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{A}) = 0. \qquad (16)$$

В силу положительной определенности матриц А и С корни ωi2, i=1,5, уравнения (15) вещественны и положительны. Величины ωi являются собственными частотами колебаний системы. Определив ωi, i=1,5, подставим их в уравнение (14), из которого найдем амплитудные векторы bi.

В приводимых результатах вычислений параметры m, l полагались равными единице, а также Ei Ii =1/3. Это не ограничивает общности и соответствует переходу в уравнениях к безразмерным переменным и параметрам. Проведенные расчеты показали, что низшие (основные) частоты колебаний близки для всех звеньев. Это говорит о том, что низшие частоты колебаний в основном определяются перемещениями на одной плоскости.

Собственные частоты звеньев составляют, согласно расчетам, $\omega_1 \approx 13$ Гц, $\omega_2 \approx 21$ Гц, $\omega_3 \approx 26$ Гц, $\omega_4 \approx 15$ Гц и $\omega_5 \approx 19$ Гц. Подставляя полученные данные в (6), определены амплитуды свободного колебания.

На опытном образце подъемника были проведены статические и динамические испытания для определения жесткостных характеристик, а также формы колебания. Результаты динамических экспериментов показывают, что низшие резонансные частоты свободного колебания механизма подъемника равны с точностью до (10÷13)% расчетным частотам. Из этого анализа видно, что колебания системы близки к одночастотным и можно оценить амплитуду колебаний механической системы с учетом только первой формы колебания звена. Когда подъемник начинает подъем рабочей площадки, амплитуда колебаний рабочей площадки составляет величину порядка $(2\div4)10^{-3}\cdot l$, где l – длины звеньев подъемника. Сравнительно высокие частоты некоторых звеньев указывают на большую жесткость, что характеризуется быстрозатухающим процессом колебаний. В случае, когда площадка загружена, амплитуда колебаний её меньше и составляет величину порядка $(0{,}5 \div 2) \cdot 10\Pi^{-3} \cdot l$.

Построенная динамическая модель механической системы подъемного механизма с помощью уравнений Лагранжа второго рода матричным методом, позволяет исследовать динамические свойства механизма подъемника.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боренштейн И.П.* Исполнительные механизмы со сложным движением рабочих органов. –.Л. :Машиностроение, 1973.

2. Дорожно-строительные машины и комплексы / В.И. Баловнев, А.Б.Ермилов и др. Под общей редакцией В.И. Баловнева. М.: Машиностроение, 1983.

3. *Джолдасбеков У.А.* Теория механизмов высоких классов. Алматы: Гылым, 2001, 427 с.

4. *Кобринский А.А., Кобринская А.Е.* Манипуляционные системы роботов. М.: Наука, 1985.

5. Механика промышленных роботов: Учебн.пособ. для втузов: В 3-х кн. / Под ред. Фролова К.Б., Воробьева Е.И. М.: Высшая школа, 1988.

Атырауский инженерно-гуманитарный институт, г. Атырау
Институт механики и машиноведения им. академика У.А.Джолдасбекова, г. Алматы

Поступила 15.03.2010 г.