УДК 539.4

Е.И. УРАЗАКОВ

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИЗУЧЕНИЮ ВЛИЯНИЯ СТРУКТУРЫ СРЕД НА ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН

Рассматривается отражение упругой монохроматической волны, падающей из жидкости в твердое тело.- Физико-механические свойства твердого тела предполагаются слабо флуктуирующими. В приближении такого влияния находятся усредненные по флуктуациям значения коэффициента отражения. Обсуждаются определенные области по углу падения в которых такое влияние может быть как малым, так и весьма существенным

Влиянию неоднородностей на распространение различного вида волн, в том числе и акустических, посвящено большое количество работ [1-4]. В работах [1, 2] неоднородность среды задавалась определенной зависимостью ее физических характеристик (скорости распространения звука, плотности среды, модуля сдвига) от координаты, нормальной к границе раздела. Естественный интерес представляет исследование отражения и преломления звуковых волн на границе сред, из которых одна (или обе) содержат случайные неоднородности. Например, в работе [5] приняты во внимание флуктуации коэффициента сжимаемости двух сред, в то время как модуль сдвига считали неизменным. Подобная задача усложняется при учете неоднородностей самой границы раздела. Отражение и преломление звуковых волн в однородной среде на границе раздела со случайными шероховатостями рассматривали, в частности, в работах [6 ,7] . В настоящей работе рассмотрено отражение звука, падающего из жидкости, от поверхности твердого тела с флуктуирующими упругими модулями. Влияние малых флуктуации модулей имеет существенно различный характер в зависимости от угла падения звука. Как будет показано, в области «прозрачности» (до угла полного внутреннего отражения) это влияние представляет собой малую

поправку, пропорциональную дисперсии флуктуации, а также отношению звуковых импедансов жидкости и твердого тела. При некотором угле падения, лежащем в области полного внутреннего отражения, выполняется условие возбуждения рэлеевских волн. В этом случае влияние флуктуации может быть существенным и приводит к значительному уменьшению коэффициента отражения, который для идеальной среды в этой области равен единице.

Уравнение, описывающее упругую волну с частотой ω в твердом теле $(x \geq 0)$, представим в виде:

$$\partial_j\left(2c_t^2(x,s)U_{ij}+\left(c_l^2(x,s)-2c_t^2(x,s)\right)\delta_{ij}U_{ll}\right)=-\omega^2U_i, \quad (1)$$

где

$$c_l^2(x,s)=c_l^2\left(1+\xi_1(x,s)\right), c_t^2(x,s)=c_t^2\left(1+\xi_2(x,s)\right) \quad ;$$

∂_j - дифференцирование по координатам $x, s=y,z$ (по повторяющемуся индексу, пробегающему три значения в уравнении (1), идет суммирование). Случайные функции $\xi_n(x,s)$ описывают флуктуацию упругих модулей. Будем считать, что эти флуктуации являются малыми по сравнению с единицей и зависят как от нормальной x, так и от тангенциальных координат s. Поглощение упругих волн в твердом теле опишем малой мнимой добавкой к частоте.

Вторую среду, занимающую полупространство $x<0$, считаем однородной и изотропной. На границе раздела должны быть выполнены условия непрерывности нормальных компонент смещения и сил, а тангенциальные компоненты тензора напряжений σ_{ir} должны равняться нулю:

$$\begin{aligned} &U_x\left(x=0^+\right)=U_x\left(x=0^-\right),\\ &\sigma_{xx}\left(x=0^+\right)=\sigma_{xx}\left(x=0^-\right),\\ &\sigma_{yx}\left(x=0^+\right)=\sigma_{zx}\left(x=0^+\right)=0 \end{aligned} \quad (2)$$

Для твердого тела

$$\sigma_{ir}=\rho_t\left(2c_t^2(0)U_{ir}+\left(c_l^2(0)-2c_t^2(0)\right)\delta_{ir}U_{ll}\right)$$ где

ρ_t - плотность твердого тела.

Запишем уравнение движения (1), выделив флуктуации:

$$L_{ir}^{(0)}U_r+L_{ir}^{(1)}U_r=0,$$

$$L_{ir}^{(0)}=\left(c_t^2\Delta+\omega^2\right)\delta_{ir}+\left(c_l^2-c_t^2\right)\partial_i\partial_r,$$

$$L_{ir}^{(1)}=c_t^2\left[\xi_2(x,s)\left(\Delta\delta_{ir}-\partial_i\partial_r\right)+\delta_{ir}\partial_l\xi_2(x,s)\partial l+\partial_r\xi_2(x,s)\partial_i-\right.$$

$$\left.-2\partial_i\xi_2(x,s)\partial_r\right]+c_t^2\left[\xi_1(x,s)\partial_i\partial_r+\partial_i\xi_1(x,s)\partial_r\right]. \quad (3)$$

Переходя далее в импульсное пространство Фурье от параллельных к границе координат, используя Фейнмановскую технику статистического усреднения, а также формулы, определяющие решения для однородных сред[6],[7], получим, что усредненный по статистическим флуктуациям коэффициент отражения будет состоять из трех слагаемых: $\left|G^{(0)}h\right|^2$, $\left\langle G^{(1)}h\left(G^{(1)}h\right)^*\right\rangle$, $G^{(0)}h\left\langle\left(G^{(2)}h\right)^*\right\rangle+\left(G^{(0)}h\right)^*\left\langle G^{(2)}h\right\rangle$. Квадрат первого слагаемого равен коэффициенту отражения от идеальной среды и имеет следующий вид:

$$\left|G_{1i}^{(0)}h_i\right|^2=\left(\Delta_r(k)-\delta\omega^4/c_t^4\right)^2\left(\Delta_r(k)+\delta\omega^4/c_t^4\right)^{-2}, \quad (4)$$

где $\delta=\rho c_1(k_1c_1)^{-1}/\rho_T c_l(k_lc_l)^{-1}$ - отношение импедансов жидкости и твердого тела; ρ, ρ_T - плотности жидкости и твердого тела соответственно. В типичном случае величина δ мала. Уравнение

$$\Delta_r(k)=\left(k_t^2-k^2\right)^2+4k_lk_tk^2=0 \quad (5)$$

дает спектр рэлеевских волн на поверхности твердого тела, граничащего с вакуумом. Необходимо отметить, что второе и третье слагаемые определяются через парную корреляционную функцию $\left\langle\xi_n(x,s)\xi_n(x',s')\right\rangle=W_n(x,x',s-s')$. Вследствие однородности условий задачи по координате s корреляционная функция W_n зависит лишь от разности $s-s'$. В дальнейшем нам потребуется ее фурье-компонента $\omega_n(x,x',k)$:

$$\left\langle\xi_n(x,k)\xi_n(x',q)\right\rangle=(2\pi)^2\delta(k+q)\omega_n(x,x',k). \quad (6)$$

При оценках будем считать, что $\omega_n(x,x',k)$ отлична от нуля в круге радиуса d^{-1} с центром в конце вектора k и со значением

$$\omega_n(x,x',k)=a^2d^2\exp\left(-\alpha|x-x'|\right), \quad (7)$$

где a^2 - дисперсия флуктуации, $|k|\leq d^{-1}$.

Экспоненциальная зависимость коррелятора $\omega_n(x,x',k)$ от координат x и x' выбрана произвольно. В формуле (7) величина α^{-1} - корреляционная длина флуктуации в направлении нормали к границе раздела, а d - в плоскости, параллельной границе. Вклад усредненных по флуктуациям поправок- это второго и третьего слага-

емых одинаков при рассмотрении выше-отмеченных областей по углу падения, а именно в области «прозрачности», до угла полного внутреннего отражения второе слагаемое мало по сравнении с третьим, поскольку содержит дополнительный малый множитель δ. Запишем его, для случая нормального падения волны:

$$R_1^{(2)} = a^2\delta\left(4\left(\operatorname{Im}\omega/c_l\right)^2 - 1,5\alpha\operatorname{Im}\omega/c_l - \right. \quad (8)$$

Для двух предельных соотношений между a

$$\left. -3\omega^2/c_l^2\right)\left(4\omega^2/c_l^2 + 4\alpha\operatorname{Im}\omega/c_l + \alpha^2\right)^{-1}$$

и собственным затуханием получаем

$$R_1^{(2)} = a^2\delta\begin{cases}-0,75,\\ -\left(3\omega^2/c_l^2 + 1,5\alpha\operatorname{Im}\omega/c_l\right)\left(4\omega^2/c_l^2 + \alpha^2\right)^{-1},\end{cases} \quad (9)$$

Исследование случая, когда угол падения со-

$$\alpha << \operatorname{Im}\omega/c_l,$$

$$\alpha >> \operatorname{Im}\omega/c_l.$$

ответствует узкой области Δ=0- отвечает области полного внутреннего отражения, и здесь попрежнему основной вклад в коэффициент отражения дается третьим слагаемым. Окончательное выражение для коэффициента отражения имеет вид:

$$|A_1|^2 \equiv R_1 = \left|H_{11}^{-1}(k)h_l(k)\right|^2 \quad (10)$$

$H^{-1}(k)$ - полная гриновская функция:

$$H^{-1}(k) = \left\{H^{(0)}(k) - (2\pi)^{-2}\int_{-\infty}^{+\infty} d^2q\int_{\infty}^{0} dx\times\right.$$

$$\left.\times\left[\int_{\infty}^{0} dx'\left\langle H^{(1)}(k,q,x)H^{(0)-1}(q)H^{(1)}(q,k,x')\right\rangle - \int_{\infty}^{x} dx'\left\langle H^{(2)}(k,k,x,x')\right\rangle\right]\right\}. \quad (11)$$

В формуле (11) появляется интеграл типа

$$I_1 = (2\pi)^{-2}\int_{-\infty}^{+\infty} d^2q\int_{\infty}^{0} dxdx' f_1(k,q,x,x')\left(\Delta_R(q) + \right.$$

$$\left. + i\delta(q)\omega^4/c_t^4\right)^{-1} \quad (12)$$

где $f_1(k,q,x,x') = SpH^{(0)-1}(k)\Delta(k)\times$

$$\times\left[\left\langle H^{(1)}(k,q,x)H^{(0)-1}(q)H^{(1)}(q,k,x')\right\rangle - \left\langle H^{(2)}(k,k,x,x')\right\rangle\right],$$

$$\Delta(k) = \Delta_R(k) + i\delta(k)\omega^4/c_t^4.$$

В линейном приближении по $\omega(x,x',k-q)$ и δ вклад флуктуации в числитель и знаменатель дроби (10) одинаков и дает для коэффициента отражения следующее значение:

$$R_1 = |A_1|^2 = \left|\frac{\Delta_R(k) - i\delta\omega^4/c_t^4 + I_1}{\Delta_R(k) + i\delta\omega^4/c_t^4 + I_1}\right|^2. \quad (13)$$

Как видно из выражения (13), коэффициент отражения имеет минимум при $\Delta_R(k) = 0$:

$$R_{1\min} = \left|\frac{I_1 - i\delta\omega^4/c_t^4}{I_1 + i\delta\omega^4/c_t^4}\right|^2 \quad (14)$$

Интеграл I_1 имеет вещественную и мнимую части. Вещественная часть I_1 дает малое, пропорциональное коррелятору ω, смещение положения минимума. Нас будет интересовать мнимая часть интеграла $\operatorname{Im} I_1\left(\omega^4/c_t^4\right) \equiv \tau$, определяющая как глубину, так и ширину минимума. Тогда выражение для коэффициента отражения будет иметь следующий вид:

$$R_{1\min} = \left|\frac{\tau - \delta}{\tau + \delta}\right|^2. \quad (15)$$

Оценка для τ дается при этом следующим выражением:

$$\tau_s \sim (ak)^2 dk/\sigma_t, \quad \delta << (dk)^{-1} \quad (16)$$

где $\sigma_t = \alpha^2 + 4r_t^2$, $r_t \equiv k - \omega/c_t$.

Значение коэффициента отражения при этом следующее:

$$R_1 = \begin{cases}1 - (ak)^2 dk/(\sigma_t\delta), & (ak)^2 dk/(\sigma_t\delta) << 1;\\ 1 - \sigma_t\delta/\left[(ak)^2 dk\right], & (ak)^2 dk/(\sigma_t\delta) >> 1.\end{cases} \quad (17)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Изд-во АН СССР, 1957, с. 168.
2. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. М.: Наука, 1978, с. 190.
3. *Лысанов Ю. П.*// Акустич. ж., 1969, т. 15, № 3, с. 393.
4 *Койшанбаев М. К., Тлеукенов С. К.*// Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1981, № 1, с. 72.
5. *Gambt B.* In: Bull. L'acad. Polon. Sci., 1975, v. XXIII, № 5, p. 245.
6. *Уразаков Е. П., Фальковский Л. А* //Ж. эксперим. и теор. физ., 1979, т. 77, № 3(9), с. 1175.
7. *Уразаков Е. И., Фальковский Л. А.*// Ж. эксперим. и теор. физ., 1980. т. 79, № 1(7). с. 261.

Резюме

Серпіндіі монохромды толқынның сұйықтықтан қатты денеге құлап шағыуы қарастырылады. Қатты дененің физика механикалық қасиеті аз мөлшердегі статистикалық флуктуациямен әсерлеседі деп қабылданады. Бұл жуықтауда шағылу коэффициентінің орташа мәндері табылады.

Summary

Reflection of the elastic simple harmonic wave falling from a liquid in a rigid body is considered. The certain areas on an angle of incidence in which such influence are discussed{considered} can be both small, and rather essential.

Институт математики МОН РК
г Алматы

Поступила 17.01.2008 г.