УДК 510.67

В. В. ВЕРБОВСКИЙ

О КОММУТАТИВНОСТИ ПСЕВДОКОНЕЧНО О-МИНИМАЛЬНЫХ УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУПП

Линейно упорядоченная структура называется псевдоконечно о-минимальной, если выпуклые компоненты любого ее формульного подмножества образуют псевдоконечный порядок. Доказано, что псевдоконечно о-минимальные упорядоченные группы абелевы и делимы.

Пусть $\mathbf{M} = (M, <, ...)$ будет линейно упорядоченной структурой. Подмножество A множества M называется *выпуклым*, если любой элемент, лежащий между двумя элементами из A, сам лежит в A. *Выпуклым компонентом множества* A назовем максимальное выпуклое подмножество множества A. Выпуклым замыкание множества A является наименьшее выпуклое множество, содержащее множество A. Я буду обозначать его $\widehat{A}$. Запись $A < B$ означает, что каждый элемент из A меньше всякого элемента из B. Линейно упорядоченная структура $\mathbf{M}$ называется *слабо о-минимальной* [1], если любое ее формульное подмножество является конечным объединением выпуклых множеств. В работе [2] был построен пример слабо о-минимальной структуры, чья элементарная теория не является слабо о-минимальной, то есть существует элементарное расширение этой структуры, которое уже не является слабо о-минимальным. Но так как в исходной структуре выпуклые компоненты $\{A_1, ..., A_n\}$ любого формульного подмножества A образуют конечный порядок, то в элементарном расширении выпуклые компоненты $\{B_i : i \in I\}$, где $B_i < B_j$ тогда и только тогда, когда $i < j$, будут образовывать *псевдоконечный порядок*, то есть множество индексов $(I, <)$ является моделью элементарной теории класса всех конечных порядков. В связи с этим следующее определение имеет смысл.

Определение (совместное с Б. С. Байжановым). Линейно упорядоченная структура называется *псевдоконечно о-минимальной*, если у любого ее формульного подмножества выпуклые компоненты упорядочены по типу псевдоконечного порядка.

Легко заметить, что слабо о-минимальная структура является псевдоконечно о-минимальной. Кроме того, любая структура, элементарно эквивалентная псевдоконечно о-минимальной структуре, сама является псевдоконечно о-минимальной структурой. То есть данное свойство элементарно.

Основное свойство псевдоконечного порядка – он содержит и минимальный элемент, и максимальный.

Целью данной работы является исследование псевдоконечно о-минимальных упорядоченных групп.

Повсюду в статье под структурой $\mathbf{G} = (G, <, \cdot, 1, ...)$ я буду подразумевать псевдоконечно о-минимальную упорядоченную группу.

Пусть $C(a)$ – централизатор неединичного элемента $a \in G$. Очевидно, что $a^n \in C(a)$, каким бы ни было целое число n. Рассмотрим выпуклое замыкание $\widehat{C(a)}$ централизатора $C(a)$. Пусть B – максимальный относительно линейного порядка выпуклый компонент централизатора $C(a)$. Очевидно, что $\sup C(a) = \sup \widehat{C(a)} = \sup B > 1$. Заметим, что множество B бесконечно. В противном случае для максимального элемента b из множества B выполнялось бы неравенство $1 < b < b^2$. Но $ab^2 = (ab)b = b(ab) = b^2 a$, следовательно, $b^2 \in C(a)$, более того, $b^2 \in B$. Но тогда $b^2 \le b$ в силу максимальности элемента b, что дает противоречие.

Пусть b и c – два произвольных элемента множества B. Тогда $b^{-1}c \in C(a)$. Обозначим через $H(a)$ множество $b^{-1}B$.

Лемма 1. Множество $H(a)$ образует выпуклую неединичную подгруппу группы $\mathbf{G}$.

Доказательство. Вначале докажем выпуклость множества $H(a)$. Пусть c_1 и c_2 – два произвольных элемента множества $H(a)$, таких что $c_1 < c_2$. Пусть элемент d лежит между ними. Тогда $bc_1 < bd < bc_2$ и элементы bc_1 и bc_2 лежат в

выпуклом множестве B. Стало быть, и элемент bd там лежит. По определению, $d = b^{-1}(bd)$ лежит в $H(a)$.

Пусть опять c_1 и c_2 лежат во множестве $H(a)$, причем $c_2 > 1$. Тогда bc_1 лежит в B. Легко проверить, что $bc_1c_2 \in C(a)$ и что $bc_1c_2 > bc_1$. Отсюда следует, что $bc_1c_2 \in B$. Следовательно, $c_1c_2 = b^{-1}(bc_1c_2) \in H(a)$. Таким образом, множество $H(a)$ замкнуто относительно умножения на положительные элементы. Заметим также, что множество $H(a)$ содержит единичный элемент, так как $1 = b^{-1}b \in H(a)$.

Докажем, что множество $H(a)$ замкнуто относительно взятия обратного элемента. Пусть $c \in H(a)$. Если $c < 1$, то $b < bc^{-1}$. Тогда $bc^{-1} \in B$ и $c^{-1} \in H(a)$. Пусть $c > 1$. Предположим, что $c^{-1} \notin H(a)$. Из этого следует, что $bc^{-1} \notin B$. Но $bc^{-1} \in C(a)$. Раз bc^{-1} не лежит в максимальном выпуклом компоненте множества $C(a)$, то существует элемент $d \notin C(a)$, такой что $bc^{-1} < d < b$. Тогда $b = bc^{-1}c < dc < bc$. Элемент bc лежит в $C(a)$ и больше элемента b. Следовательно, $bc \in B$. В силу выпуклости множества B, элемент dc тоже лежит в B, значит, коммутирует с a. Тогда из равенств $adc = dca = dac$ получаем равенство $ad = da$, что противоречит выбору элемента d. Отсюда также следует и замкнутость множества $H(a)$ относительно умножения на отрицательные элементы. Лемма 1 доказана.

Из леммы следует, что множество B является классом смежности подгруппы $H(a)$. Как было замечено выше, элемент b^2 лежит в B. Следовательно, $b = b^{-1}b^2 \in H(a)$, значит выполняется равенство $H(a) = \widehat{C(a)}$ в силу выпуклости подгруппы $H(a)$. Но тогда $C(a) \le H(a)$. Кроме того, по определению $H(a) \le C(a)$. Отсюда выводятся равенства: $H(a) = \widehat{C(a)} = C(a)$. Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 2. Централизатор $C(a)$ любого элемента – выпуклая подгруппа.

Теорема 1. Псевдоконечно о-минимальная упорядоченная группа $\mathbf{G} = (G,<,\cdot,1,...)$ является коммутативной.

Доказательство. Рассмотрим два произвольных элемента b и c группы $\mathbf{G}$. Не умаляя общности, можно считать, что $1 < b < c$. Тогда в силу леммы 2 централизатор $C(c)$ – выпуклое множество, содержащее элементы 1 и c. Следовательно, $b \in C(c)$, то есть элементы b и c коммутируют.

Начиная с этого момента я буду использовать аддитивную запись групповой операции. То есть буду рассматривать псевдоконечно о-минимальную упорядоченную группу $\mathbf{G} = (G,<,+,0,...)$.

Теорема 2. Группа $\mathbf{G} = (G,<,+,0,...)$ делима.

Доказательство. Рассмотрим подгруппу $n\mathbf{G}$ группы $\mathbf{G}$, где n – некоторое натуральное число, большее единицы. Очевидно, что подгруппа $n\mathbf{G}$ не ограничена в группе $\mathbf{G}$. Пусть B – максимальный выпуклый компонент подгруппы $n\mathbf{G}$. Так как $2na > na$ для любого положительного элемента a и так как $2na \in n\mathbf{G}$, получаем, что множество B бесконечно. А так как подгруппа $n\mathbf{G}$ не ограничена, то не ограниченно и множество B. Рассмотрим уравнение $nx = a$, где $a > 0$. Пусть элемент b лежит в B. В силу выпуклости и неограниченности множества B элемент $a + b$ тоже лежит в B, следовательно, делится на n. Тогда и $a = (a+b)-b$ делится на n как разность двух элементов, делящихся на n. Так как a делится на n тогда и только тогда, когда $-a$ делится на n, теорема доказана.

Таким образом, чистая упорядоченная псевдоконечно о-минимальная группа $\mathbf{G} = (G,<,+,0)$ (без дополнительной структуры) элементарно эквивалентна упорядоченной группе рациональных (вещественных) чисел.

В работе [3] был построен пример слабо о-минимальной группы, чья элементарная теория не является слабо о-минимальной, то есть существует такое элементарное расширение исходной группы, которое не является слабо о-минимальным. Но это расширение является псевдоконечно о-минимальным. Таким образом, доказана.

Теорема 3. Существуют псевдоконечно о-минимальные, но не слабо о-минимальные упорядоченные группы.

Но эту теорему можно и усилить следующим образом:

Теорема 4. Существуют псевдоконечно о-минимальные упорядоченные группы, которые не элементарно эквивалентны никаким слабо о-минимальным упорядоченным группам.

Доказательство. В примере из теоремы 3 существует формульное подмножество, которое не является конечным объединением выпуклых множеств. Выделим это подмножество новым одноместным предикатом, а про все остальные отношения и операции, кроме отношения порядка и операции сложения, забудем. Очевидно, что данная структура удовлетворяет требованиям теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Macpherson D., Marker D., Steinhorn Ch.* Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transaction of American Mathematical Society. 2000. № 352. P. 5435-5483.

2. *Verbovskiy V.* On formula depth of weakly o-minimal structures // Алгебра и теория моделей 2. Сборник статей / Ред. А. Г. Пинус и К. Н. Пономарев. Новосибирск, 1999. С. 209-224.

3. *Verbovskiy V.* Non-uniformly weakly o-minimal group structures // Алгебра и теория моделей 3. Сборник статей / Ред. А. Г. Пинус и К. Н. Пономарев. Новосибирск, 2001. С. 136-145.

Резюме

Егер әрбір формулдық жиынтықтың дөңес компоненттері псевдошекті рет құрастырса, онда сызықтық реттелген құрылым псевдошекті о-минималды деп аталады. Псевдошекті о-минималды реттелген группалардың коммутативтық пен бөлінгіштігі дәлелденді.

Summary

A totally ordered structure is called pseudofinitely o-minimal, if comvex components of any definable subsets forms a pseudofinite order. I prove in the paper that pseudofinitely o-minimal ordered groups are Abelian and divisible.

Институт проблем информатики
и управления КН МОН РК
Поступила 6.01.2010г.