УДК 004.65

Б. Ш. КУЛПЕШОВ

(Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан, e-mail: kulpesh@mail.ru)

ОБ ОДНОМ СИНТАКСИЧЕСКОМ СВОЙСТВЕ УПОРЯДОЧЕННЫХ СИСТЕМ

Аннотация

Доказано, что любая квази циклически минимальная теория имеет свойство изоляции. В качестве следствия получаем сводимость расширенных запросов баз данных к ограниченным над квази циклически минимальной областью определения.

Ключевые слова: модель, база, число, язык, элемент, таблица, натуральные, множество, бесконечно, информация.

Кілт сөздер: модель, база, сан, тіл, элемент, кесте, көпшілік, шексіз, ақпарат.

Keywords: model, base, number, language, element, table, natural, great number, infinitely, information.

Типичной моделью базы данных со времен Кодда является реляционная модель, в которой база данных мыслится как собрание конечного числа конечных таблиц [1, 2]. Эта модель реализуется в большинстве существующих средств управления базами данных и в предлагаемых языках запросов. При этом в качестве языка запросов обычно предлагается та или иная стилизация языка логики предикатов первого порядка. Эта традиция тоже восходит к Кодду, который в качестве языка запросов предложил использовать язык реляционных выражений, практически эквивалентный языку логики предикатов первого порядка.

Обычно при этом удобно предполагать, что элементы хранящихся таблиц выбираются из фиксированного множества, называемого универсумом. Например, в качестве такового можем взять множество натуральных чисел, множество всех слов некоторого конечного алфавита или какое-то другое множество. Это множество должно быть бесконечным. Оно может быть снабжено своими отношениями и операциями. Они составляют сигнатуру универсума. Эти отношения и операции обычно по своей природе не могут быть заданы конечными таблицами.

Итак, базы данных предназначены для хранения текущей информации о как-то структурированной предметной области. В каждый момент времени эта информация является *конечной* и представляет собой *конечный* набор *конечных* таблиц. Обычно число таблиц и устройство каждой таблицы не меняются с течением времени, но меняются строки таблиц. Могут добавляться новые строки и удаляться некоторые старые. Строки хранящихся таблиц представляют собой конечные последовательности элементов. Число элементов каждой последовательности фиксировано для фиксированной таблицы. Устройство таблицы практически и есть число элементов в каждой строке этой таблицы. Более формально, каждая таблица – это конечноместное конечное отношение, а сама база данных – это конечный набор конечноместных конечных отношений. Для удобства разговора о базе данных каждому ее отношению приписывают некоторое имя с указанием числа аргументов (или местности) этого имени отношения. *Схема* (или сигнатура) базы данных и есть конечная последовательность этих имен отношений с указанием местности каждого имени. В каждый момент времени именам отношений из этой схемы присвоены некоторые отношения соответствующих местностей. Это – *состояние* базы данных в данный момент.

Состояние называется конечным, если все его отношения конечны. Иногда удобно рассматривать не произвольные состояния базы данных, а ограниченные какими-то условиями. Типичным ограничением является условие, что элементы всех строк всех таблиц выбраны из фиксированного подмножества I универсума. Другими словами, каждому имени отношения из рассматриваемой схемы базы данных поставлено в соответствие отношение той же местности на множестве I. В этом случае говорят, что рассматриваемое состояние базы данных является состоянием над I.

Мы будем рассматривать циклически упорядоченные универсумы. Это означает, что среди отношений универсума есть тернарное отношение, которое является отношением циклического порядка. Мы будем использовать K как имя для этого циклического порядка.

Определение 1. Отношение *циклического* порядка описывается тернарным отношением K, удовлетворяющим следующим условиям:

(co1) $\forall x \forall y \forall z (K(x,y,z) \to K(y,z,x))$

(co2) $\forall x \forall y \forall z (K(x,y,z) \wedge K(y,x,z) \leftrightarrow x = y \vee y = z \vee x = z)$

(co3) $\forall x \forall y \forall z (K(x,y,z) \to \forall t\, [K(x,y,t) \vee K(t,y,z)])$

(co4) $\forall x \forall y \forall z (K(x,y,z) \vee K(y,x,z))$

Пусть L – сигнатура рассматриваемого универсума. Мы фиксируем схему базы данных ρ и вводим следующие обозначения:

$$L_0 = \{K\}, L' = L_0 \cup \rho, L'' = L \cup \rho$$

Мы рассматриваем два языка для запрашивания. Запросы первого языка есть формулы сигнатуры L' – мы называем их *ограниченными*. Запросы второго языка есть формулы сигнатуры L'' – мы называем их *расширенными*. В настоящей работе мы исследуем вопрос сводимости расширенных запросов к ограниченным над циклически упорядоченной областью определения.

Мы будем рассматривать *локально генерические запросы*, которые сохраняются при любых сохраняющих циклическое упорядочение отображениях конечных подмножеств универсума в универсум. Грубо говоря, ответ на такой запрос основывается на хранящейся информации, но не зависит от способа кодировки этой информации при хранении.

Состояние s обогащает универсум M сигнатуры L до L''-структуры, которую мы будем обозначать как (M,s).

Определение 2. Запрос $\Phi(\overline{x})$ называется *локально генерическим для конечных состояний над* M, если

$$(M,s) \models \Phi(\overline{a}) \Leftrightarrow (M, f(s)) \models \Phi(f(\overline{a}))$$

для любого частичного K-изоморфизма $f : X \to M$, где $X \subseteq M$, для любого конечного состояния s над X и для любого кортежа $\overline{a}$ в X.

Определение 3. ρ-состояние s для L-структуры W называется *псевдо-конечным* в W, если (W,s) есть модель L''-теории первого порядка всех (W,r), где r – конечное состояние над W.

Псевдо-конечное множество – это частный случай псевдо-конечного состояния. Имеется в виду сигнатура, состоящая из одного одноместного отношения и некоторых других отношений. Рассматриваются такие системы этой сигнатуры, на которых выполняются все замкнутые формулы логики предикатов, истинные на всех конечных системах этой сигнатуры. Тогда интерпретация этого одноместного отношения в такой системе называется псевдо-конечным множеством.

Определение 4. [3] Будем говорить, что полная теория T имеет *свойство изоляции*, если существует кардинал λ такой, что для любого псевдо-конечного множества A и для любого элемента a модели теории T существует $A_0 \subseteq A$ такое, что $|A_0| < \lambda$ и $tp(a/A_0)$ изолирует $tp(a/A)$.

Теорема 5. [3] Предположим, что теория универсума M имеет свойство изоляции. Тогда каждый расширенный локально генерический для конечных состояний над M запрос эквивалентен для конечных состояний над M некоторому ограниченному запросу.

В работе [4] введено понятие циклической минимальности.

Определение 6. [4] Пусть $M = \langle M, K, ... \rangle$ – циклически упорядоченная структура. Тогда M называется *циклически минимальной*, если любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа интервалов и точек в M.

Пример 7. Пусть $G = \langle G, \cdot, K \rangle$ – группа комплексных чисел по модулю 1 относительно умножения с циклическим порядком K, определенным каноническим способом (против часовой стрелки). Операция умножения сохраняет отношение K, т.е. $\langle G, \cdot, K \rangle$ – циклически упорядоченная группа.

Было доказано, что группа G является циклически минимальной (Теорема 5.1 [4]).

Обобщая понятие циклической минимальности, назовем циклически упорядоченную модель M *квази циклически минимальной*, если любое определимое подмножество модели является объединением конечного числа точек, интервалов и $\varnothing$-определимых множеств. Полную теорию T назовем *квази циклически минимальной*, если таковой является каждая ее модель.

Существуют квази циклически минимальные теории, которые не являются циклически минимальными. Простейшим примером является теория T плотно упорядоченных множеств без концевых точек с выделенным подмножеством, которое является плотным в универсуме, и его дополнение также является плотным в универсуме. Может быть показано, что T – теория структуры $\langle R, =, K^3, Q \rangle$ является квази циклически минимальной. Она не является циклически минимальной, поскольку выделенное подмножество не является объединением конечного числа интервалов и точек.

Нами доказана следующая теорема:

Теорема 8. Любая квази циклически минимальная теория имеет свойство изоляции.

Доказательство Теоремы 8. Пусть A – псевдо-конечное множество в модели M квази циклической минимальной теории T, и $a \in M$. Покажем, что существует $A_0 \subseteq A$ такое, что $|A_0| \le |T|$ и $tp(a/A_0)$ изолирует $tp(a/A)$.

Рассмотрим произвольную L-формулу $\eta(x, \bar{y})$. Так как T – квази циклически минимальна, то $\eta(x, \bar{y})$ эквивалентна формуле $\theta(x, \bar{y})$, являющейся дизъюнкцией формул вида $\phi(x) \wedge \psi(\bar{y}) \wedge \rho(x, \bar{y})$, где $\rho(x, \bar{y})$ имеет одну из следующих форм для некоторых термов t и t' в переменных кортежа $\bar{y}$:

$$x = x,\ \ x = t,\ \ x \ne t,\ \ K_0(t, x, t')$$

где $K_0(x, y, z) := K(x, y, z) \wedge y \ne x \wedge y \ne z \wedge x \ne z$.

Пусть S_θ – множество всех термов t, содержащихся в $\rho(x, \bar{y})$ по всем дизъюнктам формулы θ. Очевидно, что S_θ конечно.

Пусть F – произвольное конечное подмножество структуры M. Тогда множество $D := \{t \mid t = t(\bar{c})$ для некоторых $t \in S_\theta$ и $\bar{c} \in F\}$ конечно, т.е. существует $s < \omega$ такой, что $|D| = s$ и $D = \{t_1, ..., t_s\}$, причем $K_0(t_1, t_2, ..., t_s\}$.

Если $D=\varnothing$, то $\rho(x,\bar{y})$ содержит лишь формулу $x=x$. Если $|D|=1$, то $\rho(x,\bar{y})$ содержит формулу $x=t$ или $x\neq t$. Если $|D|\geq 2$, то для любого $d\in M$ существует $i\leq s$ такой, что

$$M\models K(t_1,...,t_i,d,t_{i+1},...,t_s).$$

Тогда введем следующие обозначения:

$$m_\theta(F,d):=t_i,\ m^\theta(F,d):=t_{i+1}$$

Так как множество A псевдо-конечно в M, тогда то же самое истинно для A (что и для F), т.е. существуют $m_\theta=m_\theta(A,a)$ и $m^\theta=m^\theta(A,a)$. Следовательно, существуют $t_\theta,t^\theta\in S_\theta$, $\bar{c}_\theta,\bar{c}^\theta\in A$ такие, что $m_\theta=t_\theta(\bar{c}_\theta)$, $m^\theta=t^\theta(\bar{c}^\theta)$.

Ясно, что $m_\theta=m^\theta$ тогда и только тогда, когда $a=t(\bar{c})$ для некоторых $t(\bar{y})\in S_\theta$ и $\bar{c}\in A$.

Если $m_\theta\neq m^\theta$, то $M\models K_0(m_\theta,a,m^\theta)$.

Если формула $\rho(x,\bar{y})$ содержит подформулу $x=x$, то $a\in A$, т.е. $tp(a/A)$ – алгебраический, и в качестве A_0 можем взять $\{a\}$. Если формула $\rho(x,\bar{y})$ содержит подформулу $x=t$, то $a=t(\bar{c})$ для некоторых $t\in S_\theta$ и $\bar{c}\in A$, и в качестве A_0 можем взять $\{\bar{c}\}$. Если каждая из формул $\rho(x,\bar{y})$ содержит только одну подформулу $x\neq t(\bar{c})$ для некоторых $t\in S_\theta$ и $\bar{c}\in A$, то в качестве A_0 также возьмем $\{\bar{c}\}$.

Пусть теперь мы имеем $K_0(m_\theta,a,m^\theta)$. Предположим, что формула $\eta(x,\bar{c})\in tp(a/A)$ для некоторого $\bar{c}\in A$, т.е. $M\models\eta(a,\bar{c})$, откуда $\phi(x)\in tp(a/\varnothing)$, $\psi(\bar{y})\in tp(A)$, где $tp(A)$ – множество всех $L(A)$-предложений, истинных на M. Покажем, что

$$tp(A)\cup tp(a/\varnothing)\models K_0(m_\theta,x,m^\theta)\to\eta(x,\bar{c})$$

Достаточно доказать, что

$$tp(A)\models K_0(m_\theta,x,m^\theta)\to\rho(x,\bar{c})$$

Формула $\rho(x,\bar{y})$ имеет вид $K_0(t(\bar{y}),x,t'(\bar{y}))$. Следовательно, $M\models K_0(t(\bar{c}),a,t'(\bar{c}'))$. Тогда в силу определения $t_\theta(\bar{c}_\theta)$ и $t^\theta(\bar{c}^\theta)$ мы имеем:

$$M\models K(t(\bar{c}),t_\theta(\bar{c}_\theta),t^\theta(\bar{c}^\theta),t'(\bar{c}'))$$

т.е. $tp(A)\models K_0(m_\theta,x,m^\theta)\to K_0(t(\bar{c}),x,t'(\bar{c}'))$. Тогда в качестве A_0 возьмем множество всех $\bar{c}_\theta$, $\bar{c}^\theta$.

Следствие 9. Пусть T – квази циклически минимальная теория, $M\models T$. Тогда каждый расширенный локально генерический для конечных состояний над M запрос эквивалентен для конечных состояний над M некоторому ограниченному запросу.

ЛИТЕРАТУРА

1 Codd E.F. A relational model for large shared data banks // Communications ACM. – 1970. – Vol. 13, N 6. – P. 377-387.
2 Codd E.F. Relational completeness of database sublanguages // Database systems. – Prentice-Hall, 1972. – P. 33-64.
3 Belegradek O.V., Stolboushkin A.P., Taitslin M.A. Extended order-generic queries // Annals of Pure and Applied Logic. – 1999. – Vol. 97. – P. 85-125.
4 Macpherson H.D., Steinhorn Ch. On variants of o-minimality // Annals of Pure and Applied Logic. – 1996. – Vol. 79. – P. 165-209.

REFERENSES

1 Codd E.F. A relational model for large shared data banks // Communications ACM. – 1970. – Vol. 13, N 6. – P. 377-387.
2 Codd E.F. Relational completeness of database sublanguages // Database systems. – Prentice-Hall, 1972. – P. 33-64.

3 Belegradek O.V., Stolboushkin A.P., Taitslin M.A. Extended order-generic queries // Annals of Pure and Applied Logic. – 1999. – Vol. 97. – P. 85-125.

4 Macpherson H.D., Steinhorn Ch. On variants of o-minimality // Annals of Pure and Applied Logic. – 1996. – Vol. 79. – P. 165-209.

Резюме

Б. Ш. Кұлпешов

(Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, e-mail: kulpesh@mail.ru)

РЕТТЕЛГЕН ЖҮЙЕЛЕРДІҢ СИНТАКТИКАЛЫҚ БІР ҚАСИЕТТІ ТУРАЛЫ

Кез келген квази циклдік минималдық теориясы жекелеу қасиеті бар болуы дәлелденді. Зерттеп қарау барысында квази циклдік минималдық анықтау аймағында мәлімет базалары кеңейтілген сұраулардың шектелген сұрауларға есептеуі алынды.

Кілтті сөздер: модель, база, сан, тіл, элемент, кесте, көпшілік, шексіз, ақпарат.

Summary

B. Sh. Kulpeshov

ON ONE SYNTACTICAL PROPERTY OF ORDERED SYSTEMS

(International University of Information Technology, Almaty, Kazakhstan, e-mail: kulpesh@mail.ru)

Here we prove that every quasi circularly minimal theory has the Isolation Property. As the corollary we have reducibility of extended database queries to restricted one over a quasi circularly minimal domain.

Key words: model, base, number, language, element, table, natural, great number, infinitely, information.

Поступила 18.01.2013г.