УДК 539.3 : 621.01

Л.А. ХАДЖИЕВА, А.Б. КЫДЫРБЕКУЛЫ

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ МУФТЫ ИЗ «НЕО-ГУКОВСКОГО» МАТЕРИАЛА

Моделируются нелинейные колебания муфты из «нео-гуковского» материала. Допускается конечность упругих деформаций. Получено уравнение крутильных колебаний муфты как части соединяемых ею валов.

Моделируется движение вращающихся валов механической системы, соединенных резинокордной муфтой.

Известно, что неравномерное распределение мощности по ветвям поперечной трансмиссии и изменение угловой скорости вращения отдельных секций вала с размещенными массами, неточность изготовления и монтажа узлов, недостаточная компенсационная способность цепных муфт и др. ведут к появлению в них нежелательных колебательных процессов, сопровождающихся значительными динамическими перегрузками некоторых узлов валопривода машин.

В целях снижения нагрузок на узлы валопривода машин и улучшения их динамических характеристик без принципиального изменения кинематической цепи практикуется включение в нее муфт из физически нелинейного материала – резины и подобных ей органических материалов. Последние обладают рядом особенностей, существенно отличающих их от металлов. К таким особенностям можно отнести: способность резины переносить большие упругие деформации; малость величин модулей сдвига, растяжения и сжатия; неизменность величины объема тела при деформировании и почти полная обратимость деформаций; значительные потери энергии при циклических деформациях и др. Основная же их особенность – это неследование закону Гука, что и определяет физическую нелинейность материала. Все это делает резину распространенным конструкционным материалом для демпферов нежелательных колебаний динамических систем и вывода их из резонансных режимов.

Здесь рассматривается моделирование движения вращающихся валов, соединенных резинокордной муфтой, выступающей в качестве демпферов колебаний.

Рассматривая муфту как часть соединяемых ею валов, исследуем крутильные колебания вращающегося вала из резиноподобного материала постоянного поперечного сечения радиуса R и длины l. Материал вала считаем изотропным и несжимаемым. Принимаемая в механике эластомеров гипотеза о несжимаемости резины является в большинстве случаев вполне приемлемой для практических приложений идеализацией материала [1-2]. Ее использование в расчетах позволяет существенно упростить анализ механических характеристик резиновых элементов и конструкций.

Поскольку колебания рассматриваемой системы происходят около ее вращательного движения, одинакового для любого элемента сечений вала, то при выводе уравнений движения последнего исключаем его общее вращение, то есть номинальное движение системы не рассматриваем.

Известно, что для линейных моделей, когда материал вала подчиняется закону Гука, и при обычных предположениях [3] (поперечные сечения стержней при их кручении остаются плоскими, сохраняя между собой первоначальные расстояния – гипотеза плоских сечений) уравнение крутильных колебаний вала с учетом диссипативных сил имеет вид [4]:

$$GJ_p \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \rho J_p \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \xi_1 \frac{\partial^3\varphi}{\partial z^2 \partial t} - \xi_2 \frac{\partial\varphi}{\partial t} = F(z, t), \quad (1)$$

где GJ_p – жесткость вала на кручение; ρJ_p – момент инерции единицы длины вала; ξ_1, ξ_2 – коэффициенты, характеризующие внутреннее и внешнее трение соответственно; $\varphi(z,t)$ – угол скручивания в некотором сечении вала; $F(z,t)$ – интенсивность внешнего скручивающего момента.

Вследствие же физической нелинейности материала муфты допущение линейной зависимости между силой и деформацией, которым руководствовались при определении внутреннего крутящего момента в уравнении (1), не имеет место. Поэтому для вывода уравнения крутильных колебаний валов, соединенных резинокордной муфтой, необходимо использовать физический закон, выражающий основные свойства материала, и математический аппарат для выведения подобных технических задач [5].

В качестве такого закона для исследуемого материала выбран упругий потенциал Трелоара:

$$\Phi = \frac{1}{2} G(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3), \qquad (2)$$

представленный через коэффициенты удлинений в трех главных направлениях $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Материал, свойства которого задаются потенциалом Трелоара (2), называют «нео-гуковским» материалом.

Упругий потенциал Трелоара задан для общего пространственного случая деформирования физически нелинейных тел, что позволяет перейти к частным случаям при рассмотрении конкретных технических задач. Для этого необходимо перейти в (2) к заданию упругого потенциала Ф через характерные величины деформации в зависимости от степеней свободы его деформирования (кручение, изгиб, продольно-поперечный изгиб и т.д.).

Используя условие изотропности и несжимаемости «нео-гуковского» материала при конечных деформациях:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1, \qquad (3)$$

известные зависимости между $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и главными компонентами тензора деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ [6-7]:

$$\lambda_1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_1}, \quad \lambda_2 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_2}, \quad \lambda_3 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_3}, \qquad (4)$$

а также

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2}, \\ \varepsilon_2 &= 0, \\ \varepsilon_3 &= -\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2}, \end{aligned} \qquad (5)$$

перешли к представлению потенциала Трелоара в виде [8-9]:

$$\Phi = 0{,}5G\left(-\left(1 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2\right)^{-1} - 3\right) \qquad (6)$$

При этом допускалась гипотеза плоских сечений, согласно которой параллельно оси стержня нет никаких упругих перемещений, а упругие перемещения в любой точке рассматриваемого сечения нормальны радиус-вектору.

Согласно соотношению

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ji}}\right)\Phi(\varepsilon_{11}, \ldots, \varepsilon_{33}) \qquad (7)$$

находятся компоненты тензора напряжения любой точки сечения при ее кручении

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= G\varepsilon_{xz}(1 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2)^{-2}, \\ \tau_{yz} &= G\varepsilon_{yz}(1 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2)^{-2}. \end{aligned} \qquad (8)$$

Выражения (8) представляют нелинейный закон деформирования резинокордной муфты, частным случаем которого является закон Гука.

Определяем абсолютную величину вектора напряжений через его составляющие:

$$|\sigma| = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = G\frac{\sqrt{\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2}}{(1 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2)^2}. \qquad (9)$$

В случае упругого кручения валов характерной степенью свободы для данного вида деформирования являются углы поворота сечений $\varphi(z,t)$. Для построения уравнений крутильных колебаний физически нелинейных валов переходим в (9) к характерным величинам – $\varphi(z,t)$.

Физически нелинейные материалы типа каучука и резины способны испытывать большие обратимые деформации, что может привести при создании их динамических моделей к нелинейности как физической природы, так еще и нелинейности геометрического характера.

Здесь помимо физической нелинейности материала муфты рассматриваются ее конечные деформации. Принимается вторая система упрощений по В.В. Новожилову, согласно которой

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xz} &= e_{xz} - \omega_x \omega_z; \\ \varepsilon_{yz} &= e_{yz} - \omega_y \omega_z, \end{aligned} \qquad (10)$$

где

$$e_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right); \quad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right);$$

Полагая отсутствие депланации сечения и используя известные соотношения между перемещениями и углами поворота

$$u = -\varphi\, y; \quad v = \varphi\, x, \qquad (11)$$

имеем:

$$\sigma = \frac{Gr\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{4}\varphi^2\right)}}{\left[1-r^2\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\left(1+\dfrac{1}{4}\varphi^2\right)\right]^2} \qquad (12)$$

После упрощения (12) согласно второй системе упрощений В.В. Новожилова получена зависимость между напряжением и углом поворота сечения:

$$\sigma = Gr\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(1+\frac{1}{8}\varphi\right), \qquad (13)$$

здесь $\partial\varphi/\partial z$ – относительный угол закручивания, r – радиус-вектор элемента сечения. Зависимость напряжений от угла поворота и крутки носит нелинейный характер. Частным случаем данного соотношения является известная из линейной теории кручения зависимость:

$$\sigma = Gr\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \qquad (14)$$

Суммируя момент касательных напряжений сечения относительно оси вала, находится внутренний крутящий момент, интенсивность которого:

$$\frac{\partial M_{kp}}{\partial z} = GJ_p\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{8}GJ_p\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{4}GJ_p\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2. \qquad (15)$$

В (15) учтена физическая и геометрическая нелинейность муфты во втором приближении по В.В.Новожилову. Первое слагаемое в (15) представляет собой известное выражение интенсивности крутящего момента линейной модели, второе и третье слагаемое означают вклад геометрической и физической нелинейностей соответственно.

Тогда крутильные колебания вала из резиноподобного материала будут задаваться следующим нелинейным дифференциальным уравнением:

$$GJ_p\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{8}GJ_p\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{4}GJ_p\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 -$$
$$-\rho J_p\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \xi_1\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^2\partial t} - \xi_2\frac{\partial\varphi}{\partial t} = F(z)\,t. \qquad (16)$$

Уравнение (16) есть волновое уравнение.

В рамках предложенной динамической модели получена скорость волн кручения в резинокордной муфте, носящая переменный характер:

$$C = \sqrt{\frac{G\left(1+\dfrac{1}{8}\varphi\right)}{\rho}}. \qquad (17)$$

Нелинейность среды проявилась в учете угла поворота, что свидетельствует о виброзащитных свойствах муфты, заключающихся в гашении всевозможных динамических возмущений волнового характера при передаче вращательного движения от одного элемента кинематической цепи механизма другому. В рамках линейной модели скорость волны кручения задается постоянной величиной $C = \sqrt{G/\rho}$, являющейся частным случаем выражения (17).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лавендел Э.Э.* Расчет резино-технических изделий. – М.: Машиностроение, 1976. – 232 с.

2. *Потураев В.Н.* Резиновые и резинометаллические детали машин. – М.: Машиностроение, 1966. – 300 с.

3. *Лейбензон Л.С.* Краткий курс теории упругости. – М.-Л.: ГИЗ, 1942. – 304 с.

4. *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.

5. *Трелоар Л.* Физика упругости каучука. – М.: ИЛ, 1953. – 240 с.

6. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. – М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – 211 с.

7. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир,1975. 873 с.

8. *Хаджиева Л.А.* О моделировании динамики элементов машин из физически нелинейного материала // Перспективы развития транспортной техники: сб. науч. тр. КазНТУ. – Алматы, 2003. – С. 170-175.

9. *Кыдырбекулы А.Б., Хаджиева Л.А.* О моделировании физически нелинейных сред и сред с начальными напряжениями // Труды Всероссийской школы-семинара по современным проблемам МДТТ. – Новосибирск, 2003. – С. 119-123.

Резюме

Жұмыста «нео-гуктық» материалдан жасалған муфтаның сызықсыз тербелістері модельденеді. Серпімді деформациялардың ақырлығы ескеріледі. Біліктерді қосушы ретінде қарастырылған муфтаның бұралу тербелістерінің теңдеуі құрылған.

Summary

Nonlinear fluctuations of muff from "neo-Gook" material are modeled. Finiteness of elastic deformations is supposed. The equation of twist fluctuations muff as part of shaft connected by it is received.

Казахский Национальный университет им. Аль-Фараби, г. Алматы

Поступила 13.05.09 г.