

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ВОЛЬТ-АМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЦЕПИ

Аннотация

Одной из важных задач в анализе и проектировании нелинейных электронных цепей является определение функциональной зависимости между током и напряжением в нелинейном элементе. Данная статья посвящена решению этой задачи для RC-цепи, в которой имеются нелинейные элементы. Для этого использованы результаты экспериментов, математическая обработка которых позволила получить явные зависимости между током и напряжением, выраженные в форме аналитических формул вольт-амперных характеристик (ВАХ). Рассматривались различные нелинейные элементы радиотехнической цепи. Предложены аппроксимирующие функции, в общих формулах которых имелись неизвестные параметры. Для определения значений этих параметров использован метод наименьших квадратов, в результате чего получены либо система алгебраических уравнений, либо трансцендентные уравнения. Решение поставленной здесь задачи аппроксимации экспериментальных данных позволило определить функциональные зависимости для описания ВАХ нелинейных элементов, которые в дальнейшем могут быть использованы для постановки и решения математических задач, получаемых в результате математического моделирования процессов, происходящих в нелинейной RC-цепи.

Ключевые слова: аппроксимация, вольт-амперная характеристика, аппроксимирующая функция, электрическая цепь.

Кілт сөздер: аппроксимация, вольт-амперлік сипаттама, аппроксимациялаушы қызмет, электрлік желі.

Keywords: approximation, current-voltage characteristics, approximating function, electrical circuit.

Введение. Анализ нелинейных электрических схем, в отличие от анализа линейных электрических схем, приводит к решению математических задач, решение которых представляют определенные трудности [1]. Известно, что для линейных схем во временной области существуют методы анализа, «основанные на получении требуемой характеристики схемы в виде рациональной функции комплексной переменной с последующим определением полюсов данной функции. После этого используются методы операционного исчисления для ее прямого преобразования во временную область» [5].

Однако такие методы для нелинейных схем не применимы. Потому что математическое моделирование процессов в таких цепях приводит к решению нелинейных дифференциальных уравнений. В связи с этим для решения задач, связанных с нелинейными уравнениями, и вследствие

этого для анализа нелинейных схем используются различные численные методы, позволяющие использовать компьютерную технику.

Следует отметить, что с помощью компьютера можно легко решить задачу, которая сложно решается другими методами, в частности, с помощью экспериментов. Однако для применения численных методов решения задачи на компьютере необходимо иметь достоверную модель нелинейных элементов для разработки математической модели задачи. По мнению многих исследователей, данная проблема является одной из сложных, потому что «любые погрешности в моделях могут свести на нет все усилия» [1-4]. В связи с этим одним из центральных вопросов расчета и проектирования электрических схем является определение вольт-амперных характеристик нелинейных компонентов схем в аналитической форме.

Очевидно, что проблема нелинейности всегда вызывает определенные трудности для исследования любого процесса. Не является исключением и электрические схемы, имеющие нелинейные компоненты. Известно, что любая электронная цепь, у которой «реакции и воздействие связаны с нелинейными элементами», называется нелинейной [1]. Вольт-амперные характеристики элементов цепи обычно определяются в результате анализа проведенных экспериментов. В литературе [1] приведено большое разнообразие графических представлений ВАХ различных элементов электронных цепей. Результаты экспериментов в основном представлены в виде графиков и в практических расчетах широко используются графические методы, кусочно-линейная аппроксимация и другие. Однако для теоретического исследования и анализа электронных цепей желательно иметь аналитическое представление ВАХ нелинейных элементов [1]. Поэтому возникает важная для практики проблема определения аналитических формул, описывающих зависимости между током и напряжением в цепях. Данная проблема является предметом предлагаемой статьи.

Постановка задачи. В связи с вышесказанными, возникает необходимость исследования различных подходов к определению аналитических зависимостей, описывающих вольт-амперных характеристик нелинейных элементов электрических схем и сделать выбор видов функций, позволяющих наилучшим образом аппроксимацию ВАХ нелинейных элементов цепи.

В общем случае электрическая цепь содержит не только элементы, которые с достаточной степенью точности можно считать линейными, но явно нелинейные элементы. Нелинейные элементы отличаются тем, что их параметры (R , L , C) являются функциями приложенного к ним напряжения. Уравнения таких цепей, составленные на основании законов Кирхгофа [1], будут нелинейными. Эти уравнения определяются по результатам экспериментов. Обычно они сводятся к графическому определению величины протекающего в цепи тока при нескольких значениях напряжения и проведению по токам плавной кривой и для этой цели используют аппроксимацию экспериментальных данных. В литературе [1] предложены различные виды аппроксимирующих функций. Целесообразно привести некоторый анализ свойств этих функций.

Экспериментальные или статистические данные являются основной информацией для определения аналитических зависимостей между рассматриваемыми переменными (показателями). Требуется определить функцию, описывающую такую зависимость между этими переменными, которые хорошо согласуются с экспериментальными данными.

В данной статье проводится анализ различных вариантов аппроксимирующих функций, используемых для описания функциональной зависимости тока от напряжения. Также будут определены неизвестные параметры, от которых зависят эти функции.

Переход к безразмерным переменным. Перед тем как перейти к анализу этих функций, целесообразно использовать безразмерные величины. Переход к безразмерным величинам и использование в расчетах безразмерных параметров обеспечивают определенные удобства при решении

задачи на компьютере. Для перехода к безразмерным переменным требуется выбрать характерные величины для данной задачи.

Пусть U_0 – некоторое напряжение, являющееся характерным для данного компонента. Тогда $\frac{U_0}{R}$ может быть характерной величиной тока для постоянного значения сопротивления R . Переход к безразмерным величинам осуществляется с помощью следующих формул:

$$(1) \quad x = \frac{u}{U_0}, \quad y = \frac{i \cdot R}{U_0}.$$

Здесь x – безразмерное напряжение; y – безразмерный ток.

С учетом этих формул (1) искомая аппроксимирующая функция может быть записана в следующем виде:

$$(2) \quad i = \frac{U_0}{R} \cdot f(x) \quad \text{или} \quad y = f(x).$$

Здесь $f(x)$ будет искомой функцией, определяющей зависимость между безразмерным током и безразмерным напряжением.

Из анализа существующих способов аппроксимации экспериментальных данных [5] следует, что чаще всего используются следующие функции:

- линейная функция: $y = a \cdot x + b$ где a, b – неизвестные параметры;
- квадратичная функция: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, где a, b, c – неизвестные параметры;

Могут быть предложены и другие функции, в частности, экспоненциальная функция:

$$(3) \quad y = a \cdot (1 - \exp(-\frac{x}{a}))$$

и гиперболический синус:

$$(4) \quad y = a \cdot sh \frac{x}{a}$$

Линейная и квадратичная функции для аппроксимации статистических или экспериментальных данных используются давно и успешно во многих областях науки. Однако линейная функция вида $y = a \cdot x + b$ используется только для линейных цепей, и использование ее для описания Нели-нейных элементов электронных схем нецелесообразно. Широкое применение получило использование квадратичной функции вида $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Последние две функции (3) и (4) представляют определенный интерес, они также могут быть использованы для аппроксимации экспериментальных данных. Потому что графики этих функций очень похожи графикам, описывающим ВАХ различных компонентов электрических цепей. Многие графики характеристик нелинейных элементов, имеющих в литературе [2], имеют такие

же формы, которые представлены ниже, на рисунках 1 и 2, где приведены графики этих функций. На рисунке 1 представлены графики, когда ток с увеличением напряжения может стремиться асимптотически к некоторому постоянному значению, а на рисунке 2 изображены графики функции, для которой увеличение аргумента (напряжения) приводит к неограниченному возрастанию значений функции (тока).

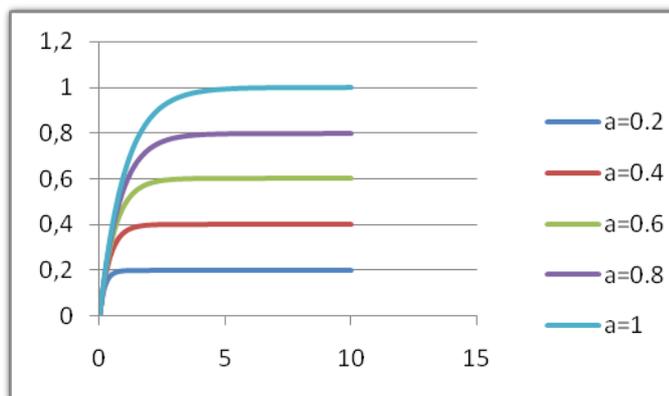


Рисунок 1 – Графики функции $y = a \cdot (1 - \exp(-\frac{x}{a}))$ для различных значений a

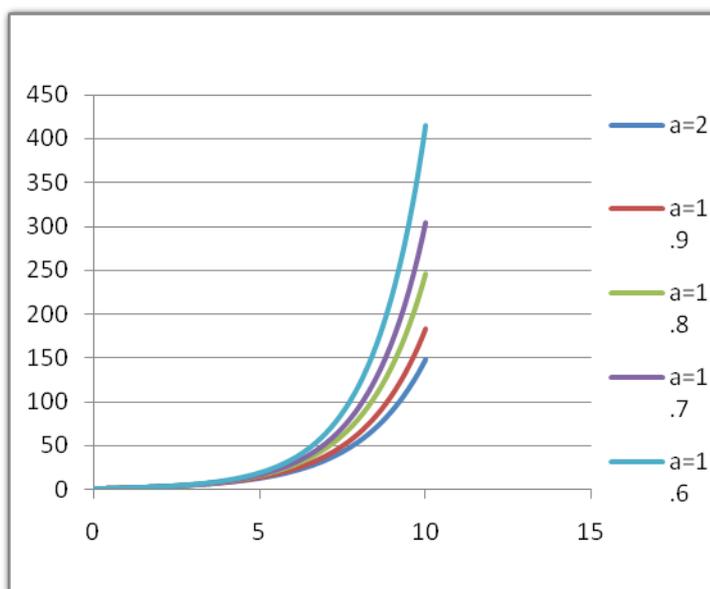


Рисунок 2 – Графики функции $y = a \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{a}$ для различных значений a

Эти функции зависят от единственного неизвестного параметра a , значение которого подлежит определению. Значения неизвестных параметров в предлагаемых функциях аппроксимации могут быть разными для разных компонентов электронной цепи. Для определения численных значений этих неизвестных параметров используются данные экспериментов и известный метод наименьших квадратов.

Кроме этого, причиной для выбора этих функций (3) и (4) в качестве аппроксимирующих является то обстоятельство, что для сравнительно небольших значений напряжения u (или аргумента x) должна выполняться линейная зависимость, т.е. закон Ома.

В самом деле, разложения этих функций в ряды Тейлора в окрестности $x = 0$ могут быть представлены в виде следующих степенных рядов:

$$a \cdot (1 - \exp(-\frac{x}{a})) = x - \frac{x^2}{2!a} + \frac{x^3}{3!a^2} - \dots + (-1)^k \cdot \frac{x^k}{k!a^{k-1}} + \dots$$

$$a \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{a} = x + \frac{x^3}{3!a^2} + \frac{x^5}{5!a^4} + \dots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!a^{2k-2}} + \dots$$

Если пренебречь малыми величинами, т.е. членами ряда, содержащими второй и выше степеней x , то сохранив в этих рядах только первые члены, можно получить формулу Ома с определенной точностью $y \approx x$ или $i = u/R$.

Для выяснения применимости этих функций в качестве аппроксимирующих функций зависимости между напряжением и током должны быть рассмотрены конкретные примеры. Примерами для определения аппроксимирующих функций должны быть эксперименты, проведенные для каждого вида элементов электронной цепи.

Математическая обработка результатов эксперимента осуществлена с помощью известного метода наименьших квадратов (МНК). Согласно этого метода, при условии выбора функцию $y = f(x, a, b, c, \dots)$ в качестве аппроксимирующей, требуется определить значения неизвестных параметров a, b, c, \dots . Для этого используется условие минимума следующей функции:

$$U(a, b, c, \dots) = \sum_{k=1}^n [y_k - f(x_k, a, b, c, \dots)]^2 \rightarrow \min.$$

(5)

Из курса математики известно [1-4], что необходимыми и достаточными условиями минимума данной квадратичной функции (5) будут равенства нулю первых ее частных производных:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial b} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial c} = 0; \dots$$

(6)

Из этих условий (6), в зависимости от вида выбранной функции аппроксимации, следует система алгебраических или трансцендентных уравнений относительно неизвестных параметров a, b, c, \dots . Поэтому задача аппроксимации экспериментальных данных сводится к решению системы алгебраических или трансцендентных уравнений.

Функции вида (3) и (4) в зависимости от параметра a могут иметь соответственно графики, показанные на рисунке 1 и 2.

Теперь для определения конкретного вида аппроксимирующих функций необходимо использовать результаты экспериментов, проведенных для двух типов транзисторов.

1. Аппроксимация характеристик полевого транзистора. Для полевого транзистора определены экспериментальные данные, приведенные в первых двух строках таблицы 1. Для сравнительного анализа здесь рассматриваются две функции в качестве аппроксимирующих.

Таблица 1 – Экспериментальные данные и значения аппроксимирующих функций для полевого транзистора

x_k	0	0,10	0,25	0,50	1,00	2,00	5,00	10,00
y_k	0	0,12	0,20	0,32	0,35	0,38	0,42	0,46
$y = a(1 - e^{-\frac{x}{a}})$	0	0,09	0,19	0,29	0,38	0,41	0,42	0,42
$u = ax^2 + bx + c$	0,16	0,17	0,17	0,21	0,26	0,34	0,50	0,44

1.1. *Экспоненциальная аппроксимация.* Сперва в качестве аппроксимирующей функцией принята $y = a \cdot (1 - \exp(-x/a))$. Для определения неизвестного параметра a в данной функции рассматривалось условие минимума следующей функции:

$$U(a) = \sum_{k=1}^n [y_k - a \cdot (1 - \exp(-\frac{x_k}{a}))]^2 \Rightarrow \min, \quad (7)$$

где x_k, y_k – экспериментальные данные; n – количество экспериментальных точек. Необходимым и достаточным условием минимума функции $U(a)$ является равенство нулю ее первой производной по a . Тогда первая производная функции (7) записывается в следующем виде:

$$\frac{dU}{da} = -2 \cdot \sum_{k=1}^n [y_k - a \cdot (1 - \exp(-\frac{x_k}{a}))] \cdot [1 - \exp(-\frac{x_k}{a}) - \frac{x_k}{a} \cdot \exp(-\frac{x_k}{a})] = 0. \quad (8)$$

Полученное уравнение (8) является трансцендентным относительно неизвестного параметра a , для решения которого использовался метод итераций. Точность вычисления искомого параметра a была определена. Условием для завершения итерационного процесса считалось выполнение следующего неравенства: $|a_{k+1} - a_k| \leq \varepsilon$, где $\varepsilon = 0,0001$. В результате решения уравнения (8) получено следующее значение параметра $a = 0,4187$. Затем были вычислены значения аппроксимирующей функции $y = a \cdot (1 - \exp(-x/a))$ для тех же значений аргумента и значения параметра $a = 0,4187$ (таблица 1). Сравнение результатов показывает достаточную близость значений аппроксимирующей функции и экспериментальных данных. Это означает, что функция $y = a \cdot (1 - \exp(-x/a))$ может быть использована в качестве аппроксимирующей функцией для характеристик нелинейных элементов. Это подтверждается также ее графическим представлением (рисунок 3).

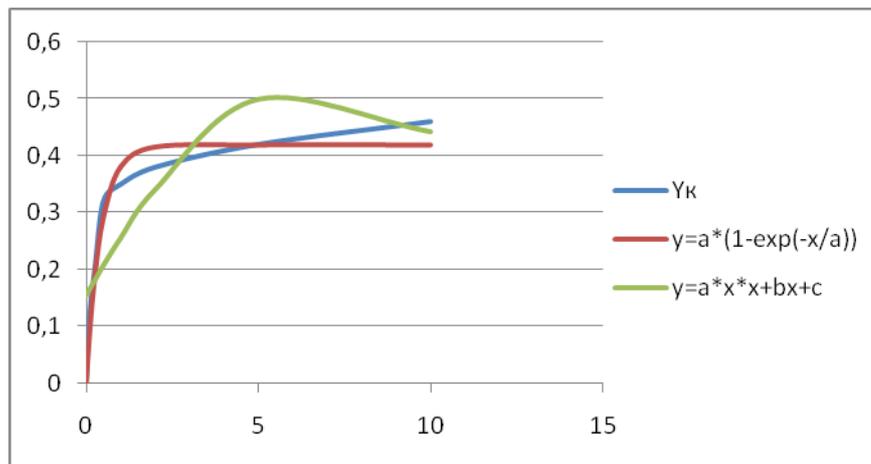


Рисунок 3 – Графики ВАХ полевого транзистора

1.2. *Квадратичная аппроксимация.* Для сравнительного анализа в качестве аппроксимирующей функции рассмотрена известная квадратичная функция $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, для которой получена система трех линейных алгебраических уравнений относительно трех неизвестных параметров a, b, c . Здесь рассматривается функция

$$(9) \quad U(a, b, c) = \sum_{k=1}^n [y_k - (a \cdot x_k^2 + b \cdot x_k + c)]^2 \rightarrow \min$$

Необходимым и достаточным условием минимума данной функции (9) являются равенства нулю ее первых частных производных по неизвестным параметрам, которое приводит к системе алгебраических уравнений. Для решения данной системы уравнений был использован известный метод Жордана-Гаусса. Здесь в качестве исходных данных использовались экспериментальные данные, приведенные в первых двух строках таблицы 1. В результате выполнения компьютерной программы, составленной для решения системы алгебраических уравнений, получены следующие значения параметров: $a = -0,0080$, $b = 0,1092$, $c = 0,1543$.

Численные значения аппроксимирующей экспериментальных данных квадратичной функции $y = -0,008 \cdot x^2 + 0,1092 \cdot x + 0,1543$ приведены в четвертой строке таблицы 1. Сравнение значений данной функции с экспериментальными данными показало достаточно удовлетворительное их совпадение (Рисунок 3). Однако экспоненциальная функция $y = a \cdot (1 - \exp(-x/a))$ имеет более близкие значения к экспериментальным, чем квадратичная функция $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Отсюда следует, что предлагаемая экспоненциальная функция $y = a \cdot (1 - \exp(-x/a))$ может быть использована для описания вольт-амперных характеристик нелинейных элементов электрической цепи типа полевых транзисторов.

2. Аппроксимация характеристик биполярного транзистора. Для биполярного транзистора были проведены эксперименты, результаты которых приведены в таблице 2. Для этого случая была решена задача аппроксимации, где также был использован метод наименьших квадратов.

Таблица 2 – Экспериментальные данные и значения аппроксимирующих функций для биполярного транзистора

x_k	0	1,02	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	11,00
y_k	0	0,70	0,74	0,77	0,80	0,83	0,86	0,88	0,91	0,99
$u = a \cdot (1 - e^{-\frac{x}{a}})$	0	0,60	0,78	0,84	0,86	0,87	0,87	0,87	0,87	0,87
$v = ax^2 + bx + c$	0,30	0,46	0,59	0,70	0,80	0,87	0,92	0,96	0,98	0,90

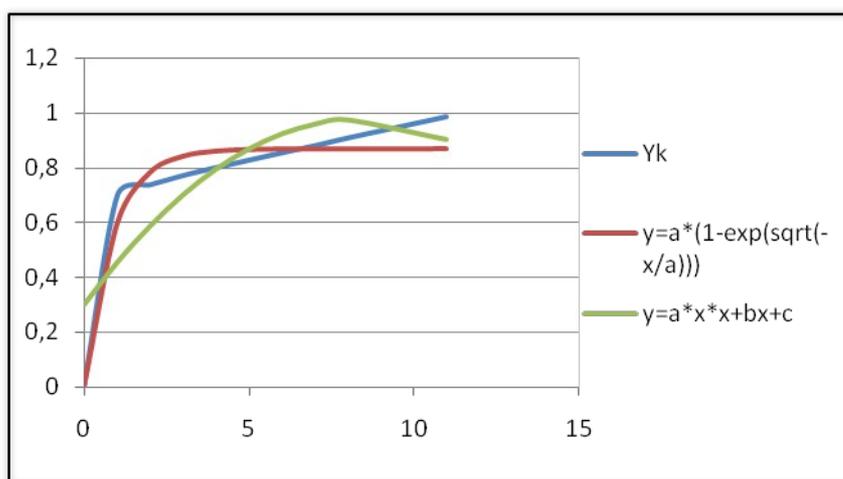


Рисунок 4 – Графики ВАХ биполярного транзистора

Результаты решения данной задачи приведены на рисунке 4, где приведены такие же графики по экспериментальным данным и графики аппроксимирующих функций для данного случая. В данном случае методом наименьших квадратов найдены значения неизвестных параметров:

- для функции $y = a \cdot (1 - \exp(-x/a))$ значение параметра $a = 0,8701$;
- для функции $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ значения параметров $a = -0,0098$; $b = 0,1627$, $c = 0,3007$.

3. Пример для резистивного элемента. Первые две строки таблицы 3 содержат экспериментальные данные, приведенные в учебнике [1]. В качестве аппроксимирующей функции использован гиперболический синус $y = a \cdot sh(x/a)$. Использование метода наименьших квадратов привело к трансцендентному уравнению относительно параметра a . Решение этого уравнения методом итераций позволило найти значение параметра $a = 2,9445$. Затем были вычислены значения функции $y = a \cdot sh(x/a)$, которые записаны в третьей строке таблицы 3, а графики приведены на рисунке 5.

Таблица 3 – Значения тока и напряжения в резистивном элементе [1]

u	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
i	0,0	0,06	0,23	0,50	0,85	1,18	1,65	2,30	2,90
$y = a \cdot sh(x/a)$	0,0	0,30	0,59	0,90	1,21	1,54	1,88	2,24	2,62

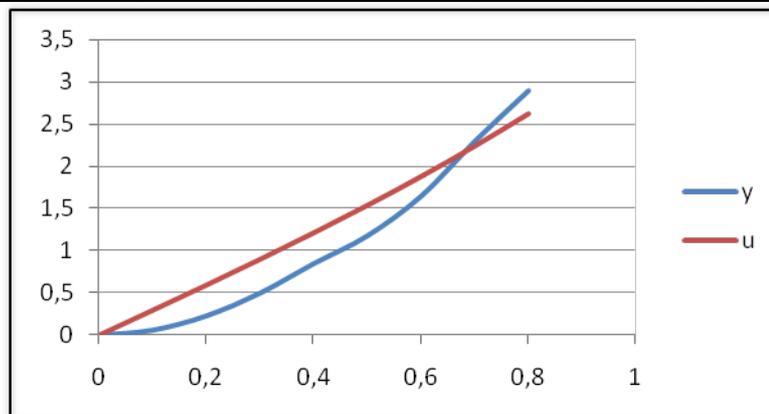


Рисунок 5 – Графики ВАХ нелинейного резистивного элемента [1]

Заключение. Исследования, результаты которых изложены в данной статье, охватывают важную проблему: анализ и выбор видов функций, используемых для аппроксимации экспериментальных данных для описания вольт-амперных характеристик нелинейных элементов в электронной цепи. Анализ рассмотренных в данной статье способов аппроксимации экспериментальных данных показал, что предлагаемые для аппроксимации функции $y = a \cdot (1 - e^{-\frac{x}{a}})$ и $y = a \cdot sh \frac{x}{a}$ достаточно близко описывают экспериментальные данные и могут быть использованы в определенных условиях для описания функциональной зависимости между током и напряжением. Кроме этого, сравнительный анализ показал, что значения квадратичной и экспоненциальной функций достаточно близки к экспериментальным значениям. Это позволяет сделать вывод о том, что рассмотренные здесь функции могут быть использованы в качестве аппроксимирующих функций с достаточно хорошим приближением.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Бакалов В.П., Дмитриков В.Ф., Крук Б.Е. Основы теории цепей: Учебник для вузов / Под ред. В. П. Бакалова. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 2000. – 592 с.
- 2 Бессонов Л.А. Нелинейные электрические цепи. – М.: Высшая школа, 1964. – 430 с.
- 3 Куралбаев З.К., Ержан А.А. // Вестник ЕНУ им. Л. Н. Гумилева. – 2012. – № 6(91). – С. 183-188.
- 4 Куралбаев З.К., Ержан А.А. // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. – №1(287). – С. 27-31.

5 Фидлер Дж.К., Найтингейл К. Машинное проектирование электронных схем / Пер. с англ., под ред. Г. Г. Казеннова. – М.: Высш. шк., 1985. – 216 с.

REFERENCES

- 1 Bakalov V.P., Dmitracov V.F., Kruk B.E. Radio and communication, **2000**, 592 (in Russ).
- 2 Bessonov L.A. Nonlinear electric circuits. – М.: High school. **1964**. – 430 с (in Russ).
- 3 Kuralbayev Z.K., Yerzhan A.A. //Vestnik ENU im. L.N. Gumilyeva. – **2012**, №6 (91). 183-188 (in Russ).
- 4 Kuralbayev Z.K., Yerzhan A.A. //Izvestya NAN RK. – **2013**, №1(287). 183-188 (in Russ).
- 5 Fidler J.K., Nightingate C. Computer aided circuit design. **1985**, 216 (in Russ).

Резюме

З. Қ. Құралбаев, А. А. Ержан

(Қ. И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университеті, Алматы қ.)

ЖЕЛІНІҢ СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ЭЛЕМЕНТТЕРІНІҢ ВОЛЬТ-АМПЕРЛІК ҚАСИЕТІН СИПАТТАУҒА АППРОКСИМАЦИЯЛАУШЫ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ПАЙДАЛАНУ

Электрлік желілерді талдау мен жобалауда кездесетін маңызды есептердің бірі сызықтық емес элемент-тегі ток пен кернеу арасындағы функционалдық байланысты анықтау болып табылады. Осы ұсынылып отырған мақала сызықтық емес элементі бар RC-желісі үшін есепті шешуге арналған. Ол үшін жүргізілген эксперименттің нәтижелерін математикалық өңдеуден алынатын вольт-амперлік сипаттаманың формуласы түрінде бейнеленген ток пен кернеу арасындағы айқын байланысты алуға мүмкіндік берді. Радиотехникалық желінің сызықтық емес әртүрлі элементтері қарастырылған. Құрамында белгісіз параметрлері бар аппроксимациялаушы функциялар ұсынылған. Белгісіз параметрлердің мәндерін анықтау үшін ең кіші квадраттар әдісі қолданылды. Осыдан алгебралық теңдеулер жүйесі немесе трансценденттік теңдеулер алынған. Осында қойылған есептің шешімі эксперименттік деректерді аппроксимациялауға қолданылатын функционалдық байланыстарды вольт-амперлік сипаттамаларды анықтауға мүмкіндік берді. Ол аналитикалық байланыстар келешекте RC-желілеріндегі құбылыстарды зерттеуде кездесетін математикалық үлгілеуде алынатын математикалық есептерді қою мен шешуге пайдаланылатын болады.

Кілттік сөздер: аппроксимация, вольт-амперлік сипаттама, аппроксимациялаушы қызмет, электрлік желі.

Summary

Z. K. Kuralbaev, A. A. Yerzhan

(Kazakh National Technical University after K. I. Satpayev, Almaty)

USING APPROXIMATING FUNCTIONS TO DESCRIBE THE CURRENT-VOLTAGE
CHARACTERISTICS OF THE NONLINEAR CIRCUIT ELEMENTS

One of the important tasks in the analysis and design of nonlinear electronic circuits is to determine the functional relationship between current and voltage in a nonlinear element. This article deals with the solution of these problems for an RC-circuit that has a nonlinear element. To do this, the results of experiments, mathematical treatment of which allowed obtaining explicit dependency of current and voltage, expressed in the form of analytical formulas of the current-voltage characteristics (CVC), were used. Various nonlinear elements of a radio technical circuit were considered. Approximating functions whose standard forms contained the unknown parameters were offered. The method of least squares was used to determine the values of these parameters, resulting in obtaining either a system of algebraic equations or transcendental equations. The solution of the stated problem of experimental data approximation allowed obtaining the functional dependencies describing CVC of nonlinear elements that can further be used for formulating and solving mathematical problems derived from the mathematical modelling of processes in the RC-circuit.

Keywords: approximation, current-voltage characteristics, approximating function, electrical circuit.

Поступила 03.04.2013 г.