УДК 539.3

Г. К. ЗАКИРЬЯНОВА

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ

На основе аппарата теории обобщенных функций для решения стационарных краевых задач теории упругости развивается метод граничных интегральных уравнений. Представлена постановка краевых задач для эллиптической системы уравнений, характерных для задач динамики анизотропных упругих тел. Построены обобщения формул Сомильяны, Гаусса и сингулярные граничные интегральные уравнения для решения краевых задач в анизотропных средах при стационарных колебаниях.

Среди динамических задач теории упругости особое место занимают задачи установившихся колебаний. При решении таких задач в зависимости от вида граничных условий и формы области может существовать дискретный спектр частот, при которых в телах сохраняются незатухающие колебания в отсутствие внешних сил (свободные колебания). При таких частотах даже при кратковременном действии возбуждающей силы той же частоты возникают большие деформации, что приводит к потере устойчивости и разрушению конструкции. Поэтому исследование таких задач имеет несомненный практический интерес.

Исследование стационарных задач для изотропных упругих сред с помощью метода потенциала и теории сингулярных интегральных уравнений изложено в работах В. Д. Купрадзе, Т. Г. Гегелия, М. О. Башелейшвили, Т. В. Бурчуладзе [1, 2], В. З. Партона, П. И. Перлина [3]. Применению метода разделения переменных и интегральных преобразований к решению стационарных задач посвящены исследования А. И. Гузя, В. Д. Кубенко, М. А. Черевко [4], Ж. С. Ержанова, Ш. М. Айталиева, Л. А. Алексеевой [5]. В анизотропных упругих средах наиболее исследованы процессы распространения стационарных волн в пространстве и полупространстве [6] и др.

Здесь рассмотрены стационарные краевые задачи для анизотропных упругих сред. Построены обобщения формул Сомильяны, Гаусса и сингулярные граничные интегральные уравнения (СГИУ) для решения краевых задач в анизотропных средах при стационарных колебаниях.

1. Постановка задачи. Рассмотрим анизотропную упругую среду, занимающую область $S^- \in R^N$ (N=2 при плоской деформации, N=3 соответствует пространственному случаю) с границей S из класса поверхностей Ляпунова с непрерывной внешней нормалью n, $\|n\| = 1$. Перемещения упругой среды $u = (u_1, ..., u_n)$ для стационарных колебаний с частотой w можно записать в виде $u_j(x,t) = u_j^*(x)\exp(-i\omega t)$, где $u_j^*(x)$ – комплексные амплитуды колебаний

точек среды $x=(x_1,...,x_n)\in S^{-}$, t – время. Для анизотропной упругой среды связь между тензорами напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} имеет вид

$$\sigma_{ij}=C_{ij}^{ml}\varepsilon_{ml}\,, \qquad (1)$$

$$\varepsilon_{ij}=0{,}5\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right), \qquad (2)$$

где C_{ij}^{ml} – матрица упругих констант, обладающая свойствами симметрии по отношению к перестановке индексов $C_{ij}^{ml}=C_{ji}^{lm}=C_{ji}^{ml}=C_{ml}^{ij}$ и эллиптичности $C_{ij}^{ml}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ml}\geq\alpha\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ml}$, $\forall\varepsilon_{ij}$, $\alpha>0$ [7]. Здесь и ниже используются обозначения $u_{i,j}=\partial_j u_i=\partial u_i/\partial x_j$. С учетом соотношений (1) и (2) уравнения движения для анизотропной упругой среды для комплексных амплитуд приводятся к системе уравнений вида

$$L_{ij}\left(\partial_x,-i\omega\right)u_j\left(x\right)+G_i\left(x\right)=0, \qquad (3)$$

$$L_{ij}\left(\partial_x,-i\omega\right)=C_{ij}^{ml}\partial_m\partial_l+\delta_{ij}\rho\omega^2,$$

$$i,j,m,l=\overline{1,N},$$

где ρ – плотность среды; G_j – компоненты массовой силы; δ_{ij} – символ Кронеккера. Здесь и всюду далее значок «*» для комплексных амплитуд опущен, по одноименным индексам в произведении проводится суммирование в указанных выше пределах изменения индексов.

Требуется построить решения основных краевых задач теории упругости:

Краевая задача I. Найти решение (1), если известны перемещения на S:

$$u_i(x)=u_i^S(x),\quad x\in S\,.$$

Краевая задача II. Найти решение (1), если известны напряжения на S:

$$\sigma_{ij}(x)n_j(x)=g_i(x),\quad x\in S\,.$$

Граничные условия записаны для комплексных амплитуд. При постановке стационарных задач начальные условия не задаются. Для выделения единственного решения в случае неограниченной области S^{-} (внешняя задача) задаются условия типа условий излучения Зоммерфельда [8]. Предполагается, что $u\in C^2(S^{-})\cup C(S^{-}\cup S)$, $G\in C(S^{-}\cup S)$.

Будем называть такие решения *классическими*.

2. Обобщенные решения краевых задач. Аналог формулы Сомильяны. Обозначим через $D_N'(R^N)$ – пространство обобщенных вектор-функций $\hat{f}(x)=\left\{\hat{f}_1,...,\hat{f}_N\right\}$ – линейных функционалов, определенных на $D_N(R^N)$ – пространстве финитных бесконечно – дифференцируемых вектор-функций $\varphi(x)=\left\{\varphi_1,...,\varphi_N\right\}$, $\varphi\in D_N(R^N)$ [8]. Введем определенные на всем пространстве R^N обобщенные функции $\hat{u}_k(x)=H_S^{-}(x)u_k(x)$, $\hat{G}_k(x)=H_S^{-}(x)G_k(x)$, где $H_S^{-}(x)$ – характеристическая функция множества S^{-} [9], обладающая свойством: $\partial_j H_S^{-}(x)=-n_j(x)\delta_S(x)$ [8], где $\delta_S(x)$ – простой слой на S. Если граница S – гладкая с непрерывной нормалью, то $H_S^{-}(x)=1/2$ для $x\in S$.

Обозначим через U_i^k матрицу Грина – решение системы уравнений (3), соответствующее действию сосредоточенной силы $\hat{G}_i(x)=\delta_{ik}\delta(x)$, где δ(x) – обобщенная дельта-функция, при фиксированном k имеет место $\left(\delta_{ik}\delta(x),\varphi_i(x)\right)=\varphi_k(0)$.

Теорема 1. *Если при данном w классическое решение первой (второй) краевой задачи u(x) существует и единственно, то $\hat{u}(x)$ представимо в виде свертки*

$$\hat{u}_i(x)=-U_i^k*\hat{G}_k+U_i^k*g_k\delta_S(x)-$$
$$-C_{kj}^{ml}U_{i,l}^k*u_jn_m\delta_S(x) \qquad (4)$$

и является обобщенным решением (1).

Доказательство. Рассмотрим (3) на $D_N'(R^N)$. Действуя оператором L_{ij} на $\hat{u}(x)$ и используя правила дифференцирования обобщенных функций, получим

$$L_{ij}\hat{u}_j(x)=-\hat{G}_k(x)+g_k(x)\delta_S(x)-$$
$$-C_{kj}^{ml}\left(u_j^S(x)n_m(x)\delta_S(x)\right)_{,l}=\hat{F}_k(x). \qquad (5)$$

Построим обобщенное решение (3) в виде свертки

$$\hat{\omega}_i(x) = -U_i^k * G_k + U_i^k * g_k \delta_S(x) - \\ -C_{kj}^{ml} U_i^k * \left(u_j^s(x) n_m(x) \delta_S(x)\right)_{,l}. \qquad (6)$$

Последнюю свертку можно преобразовать, пользуясь правилами дифференцирования сверток и обобщенных функций

$$C_{kj}^{ml} U_i^k * (u_j(x) n_m(x) \delta_S(x))_{,l} = \\ = C_{kj}^{ml} U_{i,l}^k * u_j(x) n_m(x) \delta_S(x).$$

Подставим это соотношение в (6). В результате получим правую часть (4). Покажем, что (6) является обобщенным решением (3). Действительно, если $U_i^k(x)$ – фундаментальное решение (3), решение для произвольной $\hat{F}_i$ может быть представлена в виде свертки: $\hat{\omega}_j = U_j^k * \hat{F}_k$. Подставив это в (3), получим

$$L_{ij}\hat{\omega}_j = L_{ij}\left(U_j^k * \hat{F}_k\right) = \left(L_{ij} U_j^k\right) * \hat{F}_k = \delta_{ik}\hat{F}_k = \hat{F}_i.$$

Поскольку

$$\left(\hat{\omega}_i, \varphi_i\right) = \left(U_i^k * \hat{F}_k, \varphi_i\right) = \left(U_i^k * L_{kj}\hat{u}_j, \varphi_i\right) = \\ = \left(L_{kj} U_i^k * \hat{u}_j, \varphi_i\right) = \left(\delta_i^j \delta(x) * \hat{u}_j, \varphi_i\right) = \left(\hat{u}_i, \varphi_i\right) \\ \text{для } \forall \varphi \in D_N(R^N),$$

отсюда следует, что $\hat{\omega} = \hat{u}$ и утверждение теоремы. В силу леммы дю Буа-Реймона [8] ω является классическим решением (3).

Полученная формула по известным граничным значениям восстанавливает решение в области, поэтому ее можно назвать *аналогом формулы Сомильяны* для решений (3). Она является обобщенным решением поставленной задачи и может использоваться при $\forall \hat{G}_i$ в том числе и сингулярных, что характерно для физических задач.

3. Матрицы фундаментальных напряжений и их свойства. Введем матрицы $S_{ik}^m(x)$, $T_k^i(x,n)$, компоненты которых определяются равенствами: $S_0^k(x) = C_{ij}^{ml} U_{m,l}^k$, $\Gamma_i^k(x,n) = S_0^k(x) n_j(x)$, $T_k^i(x,n) = -\Gamma_i^k(x,n)$. Отметим их некоторые свойства симметрии:

$$U_i^k(x) = U_i^k(-x),\ U_i^k(x) = U_k^i(x),$$

$$S_{ik}^m(x) = -S_{ik}^m(-x),$$

$$T_i^k(x,n) = -T_i^k(-x,n) = -T_i^k(x,-n).$$

Легко видеть, что они являются следствием инвариантности уравнений (3) относительно преобразований симметрии $y = -x$.

Теорема 2. *При фиксированных k и n матрица $T_i^k(x,n)$ является фундаментальным решением системы (1), соответствующим сосредоточенным источникам мультипольного типа $G_i(x) = n_m C_{il}^{km} \delta_{,l}(x)$.*

Доказательство. Применим дифференциальный оператор L_{ij} к матрице $T_i^k(x,n)$, используя приведенные выше свойства:

$$L_{ij} T_j^k(x,n) = -L_{ij}\Gamma_k^j(x,n) = -L_{ij} S_{km}^j(x) n_m(x) = \\ = -n_m(x) L_{ij} C_{sl}^{km} U_{s,l}^j(x) = -n_m(x) C_{sl}^{km} L_{ij} U_{s,l}^j(x) = \\ = n_m(x) C_{il}^{km} \delta_{ik} \delta_{,l}(x) = n_m(x) C_{il}^{km} \delta_{,l}(x).$$

Теорема 3 (*аналог формулы Гаусса*). *Если S – произвольная замкнутая поверхность Ляпунова в R^N, то*

$$V.p. \int_S T_i^k(x,y,n(y)) dS(y) = \\ = \rho\omega^2 \int_S U_k^i(x,y) dV(y) + \delta_{ki} H_S^-(x). \qquad (7)$$

при xOS интеграл сингулярный, берется в смысле главного значения.

Доказательство. Свернем уравнение (3) для $U_i^k(x)$ при $G_i(x) = \delta_{ik}\delta(x)$ с $H_S^-(x)$ и воспользуемся правилами дифференцирования свертки:

$$L_{ij} U_j^i(x) * H_S^-(x) + \delta_{ki} H_S^-(x) = \\ = C_{km}^{jl} U_{j,l}^i(x) * \partial_m H_S^-(x) + \\ + \delta_{kj}\rho\omega^2 U_j^i(x) * H_S^-(x) + \delta_{ki} H_S^-(x) = \\ = \int_S C_{km}^{jl} U_{j,l}^i(x,y) n_m dS(y) + \\ + \rho\omega^2 \int_S U_k^i(x,y) dV(y) + \delta_{ki} H_S^-(x) =$$

$$= -\int_S T_i^k(x,y,n(y))dS(y) +$$

$$+\rho\omega^2 \int_{S^-} U_k^i(x,y)dV(y) + \delta_{ki} H_S^-(x) = 0.$$

В силу регулярности $U_i^k(x)$, $T_i^k(x,n)$ для $x \Pi S$ формула верна для таких x. Для граничных точек интеграл в (7) является сингулярным и берется в смысле главного значения. Доказательство справедливости формулы для граничных точек аналогично доказательству в [10].

4. Сингулярные граничные интегральные уравнения. Формула (4) может быть представлена в следующем интегральном виде

$$\hat{u}_i(x) = \int_{S^-} U_k^i(y,x)\hat{G}_i(y)dV(y) +$$

$$+\int_S U_i^k(y,x)g_k(y)dS(y) -$$

$$-\int_S T_i^k(y,x,n(y))u_k(y)dS(y).$$

Для $x \Pi S$ $U_i^k(x)$, $T_i^k(x,n)$ – регулярные функции. Для граничных точек имеют место следующие асимптотики [10]:

$$U_i^k(x) \sim \ln\|x\| A_{ik}^N(e_x), \quad T_i^k(x,n) \sim \|x\|^{-1} B_{ik}^N(e_x)$$

при $N = 2$

$$U_i^k(x) \sim \|x\|^{-N+2} A_{ik}^N(e_x), \quad T_i^k(x,n) \sim \|x\|^{-N+1} B_{ik}^N(e_x)$$

при $N > 2$

здесь $e_x = x/\|x\|$, $A_{ik}^N(e_x)$, $B_{ik}^N(e_x)$ – непрерывные и ограниченные на сфере $\|e\| = 1$ функции. Поэтому последнее слагаемое в правой части (8) является сингулярным.

Соотношения (8) являются обобщением формулы Сомильяны для эллиптических систем. Они получены для обобщенных функций. Согласно лемме дю Буа-Реймона [8], в силу регулярности u и подынтегральных функций эти равенства справедливы в обычном смысле для $x \notin S$.

На границе полученные соотношения дают сингулярные граничные интегральные уравнения для решения краевых задач. Верна следующая теорема.

Теорема 4. *Если u – классическое решение первой (второй) краевой задачи, то оно удовлетворяет СГИУ вида*

$$H_S^- u_k(x) = \int_{S^-} U_k^i(y,x)G_i(y)dV(y) +$$

$$+\int_S U_k^i(y,x)g_i(y)dS(y) -$$

$$-V.p.\int_S T_k^i(y,x,n(y))u_i^S(y)dS(y). \qquad (9)$$

Доказательство формулы (9) следует из (7) при $x \to S$ с учетом теоремы 3.

Вопросы разрешимости такого типа граничных интегральных уравнений достаточно хорошо исследованы. Численной реализации уравнений для решения стационарных задач для изотропной упругой среды, статических задач для анизотропной упругой среды посвящены работы [11, 12] и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Купрадзе В.Д.* Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.

2. *Купрадзе В.Д., Гегелия Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 664 с.

3. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.

4. *Гузь А.И., Кубенко В.Д., Черевко М.А.* Дифракция упругих волн. Киев: Наукова думка, 1978. 307 с.

5. *Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А.* Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. Алма-Ата: Наука, 1989. 240 с.

6. *Петрашень Г.И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1980. 280 с.

7. *Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М.* Методы граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1986. 296 с.

8. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.

9. *Закирьянова Г.К.* Регулярное представление формул Кирхгофа и Сомильяны для нестационарной динамики анизотропных сред на контуре // Вестник АН КазССР. 1992. № 3. С. 79-84.

10. *Alexeyeva L.A., Zakiryanova G.K.* Generalized solutions of boundary value problems of dynamics of anisotropic elastic media // J. of the Mechanical Behavior of Materials. 2005. V. 16. N 4-5. P. 259-267.

11. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.

12. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.

Резюме

Серпімді орталар үшін стационарлы шектік есеп үшін жалпылама функциялар теориясының негізінде шекаралық интегралдық теңдеулер әдісі дамытылады. Жалпыланған функциялар кеңістігінде эллиптикалық теңдеулер жүйесі үшін шектік есептің қойылуы көрсетілген. Анизотропты серпімді ортадағы стационар

тербеліс шектік есептердің шешімі үшін Сомильяна, Гаусс формулаларының жалпыламасы және сингулярлық шекаралық интегралды теңдеулері құрастырылған.

Summary

Using generalized functions theory the method of boundary integral equations for the solution of stationary boundary value problems of elasticity theory is developed. The statement of boundary value problems for elliptic systems, which for anisotropic elastic media are typical, is given. Generalization of the Somigliana's formulas and Gauss one for the generalized solutions of boundary value problems and singular integral equations for the solution of stationary oscillations in anisotropic elastic media are constructed.

Институт математики,
г. Алматы

Поступила 4.03.2010г.