УДК 519.644.7

С. К. ЗАМАНОВА, А. И. КУПЧИШИН, А. Д. МУРАДОВ

ВЛИЯНИЕ ЧИСЛА УЗЛОВ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ НА ТОЧНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ МНОГОКРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДОМ ОПТИМАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Рассмотрено влияние числа узлов квадратурной формулы на точность вычисления пятнадцатикратных интегралов методом оптимальных коэффициентов. Определены значения узлов N квадратурной формулы, для которых рассчитаны различные наборы оптимальных коэффициентов и интегралов. Установлено, что величина N существенно влияет на равномерность расположения точек сеток и, соответственно, на точность вычисления многократного интеграла.

При изучении ряда физических и математических процессов нередко решение задачи представляется в виде многократных интегралов. Одним из перспективных методов вычисления многократных интегралов, кроме методов Гаусса, Монте-Карло, является метод оптимальных коэффициентов [1], позволяющий производить вычисления с высокой точностью.

Приближенное вычисление интегралов произвольной кратности, основанное на применении теоретикочислового метода, можно производить, в частности по квадратурной формуле:

$$f(x_1,\dots,x_s)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f \times \qquad (1)$$

$$\times\left(\left\{\frac{a_1 k}{N}\right\},\dots,\left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right)\psi(x_1,\dots,x_s)+O\left(\frac{\ln^{\gamma_1} N}{N^{\frac{\alpha-1}{2}}}\right),$$

которая получена путем применения функции $f(x_1,\dots,x_s)\in E_s^{\alpha}$ к коэффициентам Фурье, согласно работы [2].

Здесь $a_1,\dots,a_s$ – специальным образом выбранные целые числа (оптимальные коэффициенты); $\psi(x_1,\dots,x_s)$ – известные тригонометрические функции; γ_1 – показатель функции в интервале [0, 1], не зависящий от N; α – параметр, характеризующий гладкость функций из класса E_s^{α}.

В работе [3] были рассчитаны оптимальные коэффициенты для вычисления пятнадцатикратного интеграла J с числом узлов квадратурной формулы N = 33139. Показано, что изменение конфигурации параллелепипедальной сетки влияет на точность квадратурной формулы, а это сказывается на точности вычисления интеграла данного вида.

Нами было исследовано влияние числа узлов квадратурной формулы на точность вычисления пятнадцатикратного интеграла J от непериодических функций, для которых использовалась периодизация вида $\psi(x)=\sin^2\frac{\pi}{2}x$.

Проведены вычисления и получены наборы оптимальных коэффициентов для расчета пятнадцатикратных интегралов, значения N которых пробегают интервал от 15019 до 71053.

Узлы N выбраны таким образом, что $N=p\cdot q$, где p и q простые числа, большие s (кратность интеграла), причем q имеет порядок $\sqrt{p}$ (табл. 1). Данный способ вычисления оптимальных коэффициентов при больших значениях N позволяет уменьшить число соответствующих элементарных операций до $O\left(N^{1+\frac{1}{3}}\right)$.

Таблица 1. **Значения *N* числа узлов квадратурной формулы для чисел *p* и *q***

N	15019	18101	20039	24041	28117	33139	39029	46213	51097	57091	71053
p	653	787	691	829	907	1069	1259	1249	1381	1543	1733
q	23	23	29	29	31	31	31	37	37	37	41

Таблица 2. **Наборы оптимальных коэффициентов для вычисления пятнадцатикратных интегралов**

N	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15
15019	11103	657	10456	11117	5909	4635	7311	11357	12266	12125	8578	5544	13530	6143
	9148	36	13929	1296	5817	1599	14165	12507	14313	14701	4622	3060	11092	1428
	661	1370	4430	14544	1424	10086	13429	340	14474	211	4300	3198	13461	13973
	3927	11835	7259	31	1585	6429	14763	961	4078	4052	7083	14261	1156	12992
	10459	7304	5902	928	3678	4543	10140	5101	3871	10584	8026	2232	12656	7569
	6543	6699	6115	14848	7572	10934	5665	14222	11841	7661	7520	1116	2754	11130
	3284	1014	10777	6904	9065	1802	282	9929	587	5276	9477	4122	9471	12982
	1326	1053	14530	12422	10748	13836	8337	878	7765	8375	6209	2211	213	9879
	11126	1278	11054	11232	9152	11351	11474	13243	5228	13160	12948	10686	4360	11922
18101	2363	8661	11813	2377	5541	6360	4850	2617	11530	3385	16214	13061	15036	17078
	12597	11043	2486	1412	11782	7755	16739	2634	1365	17056	13663	8503	17434	7647
	8663	823	15956	7592	8563	3371	6060	4880	9605	15919	12879	14314	14712	1431
	8664	49	8213	2401	4215	9043	7424	8683	1756	9144	13640	13632	7383	421
	797	1674	12805	14722	3986	9167	11396	14011	16551	13619	11844	9047	10641	17002
	14965	5653	11172	8144	927	7189	9142	2672	1371	8582	3035	3366	1487	9702
	3948	1743	2984	15182	6125	16665	14386	13091	4913	10353	1586	16683	16331	15213
	2378	7372	8848	7182	9553	279	11826	11375	6856	12668	4440	5437	5072	12520
	9468	6872	9102	16976	9989	16228	5416	16656	3096	7409	7037	14636	8236	4566
	2386	9282	9329	12865	14695	633	7955	10782	4331	16196	16122	4657	13158	10474
20039	10367	5532	18665	3471	13852	4210	128	4402	6731	4479	3430	9624	11242	9593
	2769	12463	2889	4080	15563	10097	4188	14030	13488	15615	13812	11016	17361	15155
	11063	11796	5180	14839	4369	179	16455	7389	5426	11033	530	12002	13127	13305
	15210	13884	4658	10315	5819	14766	13787	12174	6180	14890	16161	10436	16056	1351
	3465	2864	4455	6545	14316	8415	1230	13682	15895	9003	14711	14438	3702	3184
	7612	9795	14460	15332	48	4674	9263	12754	14532	2304	3923	3766	4398	9419
	4162	8548	7551	6110	329	6646	6832	19482	6290	8046	2283	3360	7201	10876
24041	23214	10781	3324	15767	14954	14157	128	14349	9631	16775	22773	14873	531	3663
	7467	5010	1874	1296	12750	1890	563	20787	7833	21299	8418	14032	21817	15756
	11614	14986	14605	13215	1266	14273	3927	2401	21695	16050	14827	19136	4840	22368
	9961	4314	10487	2862	19797	13635	10626	17104	18418	4827	23788	4172	5954	2619
	12452	11895	23980	9740	19676	3721	6885	1814	13429	12753	9551	22266	15420	16985
	12455	14493	10487	832	889	13635	22342	19076	18418	21009	4851	1342	5400	19978
28117	22677	14516	13613	5458	32	22739	14640	13861	5954	1024	24723	18608	24255	21826
	8174	8284	7680	19176	20466	21051	22951	4850	27047	26324	21092	7222	15303	17052
33139	9623	11763	25664	12844	22481	3271	27922	2394	5857	25611	33049	28683	1778	4246
	28874	30053	5607	12503	28495	22677	15336	8346	28735	26386	3754	28466	13806	13517
	28877	4472	28400	15967	16152	23018	21863	6762	11286	16896	295	1992	26578	2178
	8570	8876	13315	11973	10266	28714	21905	26554	2267	8736	6519	28615	12916	12788
	6437	11219	6822	4039	18067	12528	15549	9133	535	30478	4006	15205	6288	32913
39029	5038	12594	26447	34009	32	5100	12718	26695	34505	1024	7084	16686	10548	36853
46213	23733	11245	43723	11257	5028	7558	21361	4003	35484	2273	14538	4096	38911	28030
	34981	42547	729	37786	7840	23098	3046	31161	16910	2310	25786	34732	34804	39972
	24990	23831	35972	5004	43795	20784	4253	38783	8134	23886	24032	22859	41780	34933
	31239	41413	13985	25926	19489	6809	34125	35604	25085	42687	23078	10842	44374	40451
51097	9669	33148	27628	16	1413	19398	33272	256	22608	3786	21382	4096	4049	41802
	22101	17978	1506	19959	44555	19768	13218	9469	32154	29575	4251	35065	34463	30520
	12442	30551	4959	25799	50901	14024	41450	49976	1999	38416	10534	223	15328	16972
	12443	4339	31745	23225	35140	9991	50109	20693	5216	9498	47350	27640	41710	21985
	12444	29226	30995	21624	12254	15328	47628	8729	42551	37530	47837	3578	19145	6347
	33165	3203	47929	39809	21199	21212	43581	34123	44036	50583	19588	39859	48525	37476
	24881	24006	20453	16070	3645	45167	23806	662	17988	805	50278	25803	17665	37926
57091	55550	33950	35497	49392	46322	38639	3214	14143	14399	19540	32908	42671	12821	29062
71053	2363	8661	11813	2377	5541	6360	4850	2617	11530	3385	16214	13061	15036	17078
	12597	11043	2486	1412	11782	7755	16739	2634	1365	17056	13663	8503	17434	7647
	8663	823	15956	7592	8563	3371	6060	4880	9605	15919	12879	14314	14712	1431
	8664	49	8213	2401	4215	9043	7424	8683	1756	9144	13640	13632	7383	421
	797	1674	12805	14722	3986	9167	11396	14011	16551	13619	11844	9047	10641	17002
	14965	5653	11172	8144	927	7189	9142	2672	1371	8582	3035	3366	1487	9702
	3948	1743	2984	15182	6125	16665	14386	13091	4913	10353	1586	16683	16331	15213
	2378	7372	8848	7182	9553	279	11826	11375	6856	12668	4440	5437	5072	12520
	9468	6872	9102	16976	9989	16228	5416	16656	3096	7409	7037	14636	8236	4566
	2386	9282	9329	12865	14695	633	7955	10782	4331	16196	16122	4657	13158	10474

Таблица 3. **Значения интегралов *J* и их погрешности Δ*J***

N	*J*	Δ*J*	ε , %
15019	0,00002774088396	0,000002776694165	9.098671
	0,00002841461694	0,000002102961185	6.890983
	0,00003451380966	0,000003996231535	13.09485
	0,00002915313865	0,000001364439475	4.470995
	0,00003392498265	0,000003407404525	11.16538
	0,00003755179652	0,000007034218395	23.04973
	0,00002374569895	0,000006771879175	22.19009
	0,00004058309891	0,000010065520785	32.9827
	0,00002576007418	0,000004757503945	15.58939
18101	0,00003936285115	0,00000884527302	28.98419
	0,00001867296997	0,00001184460816	38.81241
	0,00001130648931	0,00001921108882	62.9509
	0,00001122797289	0,00001928960524	63.20818
	0,00003417234514	0,00000365476701	11.97594
	0,00006710999974	0,00003659242161	119.906
	0,00001004769173	0,00002046988640	67.07572
	0,00005048056612	0,00001996298799	65.41472
	0,00000908308479	0,00002143449334	70.23655
	0,00001725383866	0,00001326373947	43.46262
20039	0,00002699444972	0,000003523128405	11.54459
	0,00002564189189	0,000004875686235	15.97665
	0,00003849729467	0,000007979716545	26.14794
	0,00002201989704	0,000008497681085	27.8452
	0,00002618002639	0,000004337551735	14.21329
	0,00002647172397	0,000004045854155	13.25745
	0,00002828603956	0,000002231538565	7.312306
24041	0,00005609240488	0,00002557482675	83.80359
	0,00001973092563	0,00001078665250	35.3457
	0,00002544047457	0,00000507710356	16.63665
	0,00017532222402	0,00014480464589	474.4959
	0,00002612630447	0,00000439127366	14.38933
	0,00003049857786	0,00000001900027	0.06226
28117	0,00003163011489	0,000001112536765	3.64556
	0,00003449800079	0,000003980422665	13.04305
33139	0,00003135979067	0,000000842212545	2.759762
	0,00003071662422	0,000000199046095	0.652234
	0,00002934528657	0,000001172291555	3.841365
	0,00003149821800	0,000000980639875	3.213361
	0,00003594165455	0,000005424076425	17.77361
39029	0,00002955433831	0,000000963239815	3.156344
46213	0,00002494013392	0,000005577444205	18.27617
	0,00002730806043	0,000003209517695	10.51695
	0,00003010876296	0,000000408815165	1.339606
	0,00002685309977	0,000003664478355	12.00776
51097	0,00002433508311	0,000006182495015	20.2588
	0,00003001614445	0,000000501433675	1.643098
	0,00006007441154	0,000029556833415	96.85183
	0,00003032667858	0,000000190899545	0.62554
	0,00002930746648	0,000001210111645	3.965294
	0,00002131212231	0,000009205455815	30.16444
	0,00002425227231	0,000006265305815	20.53015
57091	0,00001495591178	0,000015561666345	50.99247
71053	0,00002907557878	0,000001441999345	4.725143
	0,00002550447154	0,000005013106585	16.42695
	0,00003151970888	0,000001002130755	3.283782
	0,00003122011608	0,000000702537955	2.302076
	0,00002759952908	0,000002918049045	9.561863
	0,00003497837711	0,000004460798985	14.61715
	0,00003037632955	0,000000141248575	0.462843
	0,00003192117793	0,000001403599805	4.599316
	0,00003080121081	0,000000283632685	0.929408
	0,00002698820819	0,000003529369935	11.56504

Для каждого значения N нами были получены наборы коэффициентов, по которым рассчитаны пятнадцатикратные интегралы вида $\int_0^1 \cdots \int_0^1 x_1 x_2 \ldots x_{15} dx_1 dx_2 \ldots dx_{15}$, значения которых приведены в табл. 2 (см. стр. 39). Значение коэффициента a_1 всегда приводится к 1 и поэтому в табл. 2 не указано.

По полученным наборам коэффициентов рассчитаны пятнадцатикратные интегралы, значения которых приведены в табл. 3 (см. стр. 40).

Аналитически вычисленное значение интеграла равно 0,000030517578125.

Из полученных результатов следует, что с увеличением числа узлов квадратурной формулы (значения N) улучшается точность вычисления интеграла данного вида. Наилучший результат получен при $N = 71053$, для которого погрешность вычисления составляет 0,46%, а самый наихудший результат при $N = 15019$, погрешность вычисления для которого – 32,98%.

Равномерность расположения точек сеток отражается на точности квадратурных формул, построенных с помощью параллелепипедальных сеток.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коробов Н.М.* Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963. 224 с.

2. *Рябенький В.С.* О таблицах и интерполяции функций из некоторого класса // Докл. АН СССР. 1960. 131. №5. С. 1025-1027.

3. *Заманова С.К., Купчишин А.И., Мурадов А.Д.* О применении метода оптимальных коэффициентов для решения радиационно-физических задач // Вест. КазНУ им. аль-Фараби. Сер. физич. 2007. №1(23). Алматы: КазНУ, 2007. С. 119-122.

Резюме

Тиімді коэффициент әдісімен он бес еселі интегралдардың есептеу дәлдігіне квадратуралық формуланың түйіндер санының әсері карастырылған. Анықталған квадратуралық формуланың N түйіндер мәндеріне тиімді коэффициенттердің әртүрлі жинақтары мен интегралдары есептелінді. N шамасы тор нүктелерінің біркелкі орналасуына және сәйкесінше, көпеселі интегралдың есептеу дәлдігіне айтарлықтай әсер ететіні анықталды.

Summary

Influence of knots number of quadrature formula on the calculation accuracy of 15 multiple integrals by the optimum factor method has been considered. Values of N knots for quadrature formula for which various sets of optimum factors and integrals are calculated were defined. It is established that N size essentially influences on the uniformity of an arrangement of grid points and on the calculation accuracy of multiple integral.

КазНУ им. аль-Фараби *Поступила 19.09.09г.*