

# Математика

УДК 517.958

Б. Т. ЖУМАГУЛОВ, Ш. Н. КУТТЫКОЖАЕВА, Н. А. ИСАБЕКОВА

## СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ОКЕАНА

Изучается сходимость разностных схем линейной модели океана. Исследуется сходимость итерационного метода по физическим факторам для линейных сеточных уравнений модели океана.

Рассмотрим краевые задачи модели океана в области  $\Omega$ :

$$\mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} + \mu \Delta v - \hat{\nabla} P = f, \quad (1)$$

$$\partial_i v v = \partial_i \hat{v} v + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = \rho g, \quad \partial_i \hat{v} v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \quad v = (v_1, v_2), \quad (3)$$

$$v \Big|_{x_3=0} = v \Big|_{x_3=H} = 0,$$

$$v_3 \Big|_{x_3=H} = v_3 \Big|_{x_3=0} = 0, \quad v \Big|_{\gamma} = 0. \quad (4)$$

Для построения разностных схем для задачи (1)-(4) строим сначала сетки. Предположим, что область  $\Omega$  - прямоугольный параллелепипед. Для простоты будем предполагать  $\Omega$  - куб,  $h = 1/N$ .

Введем множество

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_1 &= \left\{ \begin{array}{l} x = (x_1, x_2, x_3), \\ 0 \leq i \leq N+1, \end{array} \right. \\ x_1 &= (i-1/2)h, \quad x_2 = jh, \quad x_3 = kh, \\ 0 \leq j \leq N, \quad 0 \leq k \leq N \end{aligned} \quad \left. \right\}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_2 &= \left\{ \begin{array}{l} x = (x_1, x_2, x_3), \quad x_1 = ih, \\ 0 \leq i \leq N \quad 0 \leq j \leq N+1, \end{array} \right. \\ x_2 &= (j-1/2)h, \quad x_3 = kh \\ 0 \leq k \leq N \end{aligned} \quad \left. \right\}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_3 &= \left\{ \begin{array}{l} x = (x_1, x_2, x_3), \quad x_1 = ih, \\ 0 \leq i \leq N \quad 0 \leq j \leq N \\ x_2 = jh, \quad x_3 = (k-1/2)h, \\ 0 \leq k \leq N+1 \end{array} \right. \end{aligned} \quad \left. \right\}$$

$$\begin{aligned} \Omega_h &= \left\{ \begin{array}{l} x = (x_1, x_2, x_3), \quad x_1 = ih, \\ 0 \leq i, j, k \leq N \\ x_2 = jh, \quad x_3 = kh, \end{array} \right. \end{aligned} \quad \left. \right\}$$

Обозначим через  $S_1, S_2, S_3, S_h$  - границы области  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_h$  соответственно. Пусть  $H$  - множество векторов функций, определенных на  $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$ , а  $P$  - пространство функций, определенных на  $\Omega_h$  и ортогональные единице. Сначала рассмотрим разностную схему первого порядка, аппроксимирующую уравнения (1)-(3).

$$\mu_0 u_{x_3 \bar{x}_3} + \mu \Delta_h u - \hat{\nabla}_h Q = f_h, \quad (5)$$

$$\operatorname{div}_h \bar{u} = \operatorname{div} \hat{v}_h u + u_{\bar{x}_3} = 0, \quad (6)$$

$$-Q_{x_3} = \rho g, \quad (7)$$

$$u = (u_1, u_2) \Big|_{S_h=0} = 0,$$

$$S_h - \sigma \text{ границе } \Omega_h \quad (8)$$

$$u_3 \Big|_{x_3=0} = u_3 \Big|_{x_3=1} = 0. \quad (9)$$

Здесь использовались обозначения

$$u_{\bar{x}_1} = \frac{u_{i+1,j,k} - u_{ijk}}{h}, \quad u_{\bar{x}_1} = \frac{u_{ijk} - u_{i-1,j,k}}{h},$$

$$u_{x_1 \bar{x}_1} = \frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{h}, \quad \Delta_h u = u_{x_1 \bar{x}_1} + u_{x_2 \bar{x}_2},$$

$$\operatorname{div}_h \bar{u} = \frac{u_{1,i,j,k} - u_{i-1,j,k}}{h} + \frac{u_{2,i,j,k} - u_{2i,j-1,k}}{h},$$

$$\operatorname{div} \hat{v}_h u = \frac{u_{1i,j,k} - u_{i-1,j,k}}{h} + \frac{u_{2i,j,k} - u_{2i,j-1,k}}{h},$$

$$\|u\|^2 = \sum_{\Omega_h} (u_{ijk})^2 h^3,$$

$$\hat{\nabla}_h Q = (Q_{x_1}, Q_{x_2}, Q_{x_3}), \quad \operatorname{div}_h \vec{u} = \operatorname{div} \hat{v}_h u + u_{3\bar{x}_3},$$

$$\nabla Q = (Q_{x_1}, Q_{x_2}, Q_{x_3}). \quad (10)$$

К остальным аргументам обозначения вводятся аналогично Уравнение (6) аппроксимируется в области  $\Omega_h$ . Уравнение (4) выполняется в точках  $\bar{\Omega}_h$ , где определен  $\operatorname{div} \vec{u}$ . Уравнение (8) справедливо в точках  $\Omega_h$  и  $x_3 = 0$ . Для произвольных сеточных функций  $v$  и  $u$  заданные на сетке, справедливы легко проверяемые соотношения

$$(v, u)_{x_1} = u_{x_1} v + u v_{x_1} = u_{x_1}^{+1} v + u v_{x_1},$$

$$(v, u)_{\bar{x}_1} = u_{\bar{x}_1} v + u v_{\bar{x}_1} = u_{\bar{x}_1}^{-1} v + u v_{\bar{x}_1},$$

$$2\Delta t u^k \frac{u^k - u^{k-1}}{\Delta t} = (u^{k-1})^2 + (u^k - u^{k-1})^2,$$

$$h \sum_{l=0}^{m-1} u_x(l) v(l) = -h \sum_{l=1}^m u(l) v_{\bar{x}}(l) +$$

$$+ u(m) v(m) - u(0) v(0).$$

Обозначим через  $\Omega_h^1, \Omega_h^0$  - множество тех точек  $\bar{\Omega}_h$ , где определены операторы  $\nabla_h, \operatorname{div}_h$  соответственно. Вычислим

$$\sum_{i=0, j, k=1}^{N-1} (Q_{x_1}, u_1) h^3 = \sum_{j, k=1}^{N-1} h^2 \sum_{i=0}^{N-1} Q_{x_1} u h =$$

$$= \sum_{j, k=1}^{N-1} h^2 \sum_{i=0}^N Q u_{\bar{x}_1} h = \sum_{i, j, k=1}^N Q u_{\bar{x}_1} h^3,$$

$$\sum_{j=0, i, k=1}^N (Q_{x_2}, u_2) h^3 = - \sum_{i, j, k=1}^3 Q u_{2\bar{x}_2} h^3,$$

$$\sum_{k=0, i, j=1}^N (Q_{x_3}, u_3) h^3 = - \sum_{i, j, k=1}^N Q u_{3\bar{x}_3} h^3.$$

Умножим (5), (6), (7) на  $u_1, u_2, u_3$ , и сумми-

руем по  $\Omega_h$ , в результате получим

$$\|u\|_1^2 = (f_h, u) + (\rho g, u_3),$$

где

$$\|u\|_1 = (\mu_0 \|u_{x_3}\|_{\Omega_4^1}^2 + \mu (\|u_{x_1}\|_{\Omega_4^1}^2 + \|u_{x_2}\|_{\Omega_4^1}^2))^{1/2}.$$

Используя неравенство Гельдера, имеем

$$\|u\|_1^2 \leq \|f_h\| \|u\| + \|\rho g\| \|u_3\| \leq (\|f_h\| + \|\rho g\|) \|u\|.$$

Здесь использованы

$$\|u_3\| \leq C \|u_{3x_3}\| \leq C \|d\mathbf{E} u\| \leq C \|u\|_1. \text{ Далее легко выводится:}$$

$$\|u\|_1^2 \leq C (\|f_h\|^2 + \|\rho g\|^2).$$

**Теорема 1.** Пусть решение задачи (1)-(4) достаточно гладкое. Тогда имеет место оценка

$$\|u - v\|_1^2 \leq Ch^2.$$

В силу (1)-(4) и (5)-(9) для

$$\omega = v - u, \quad \pi = P - Q \text{ получим уравнение}$$

$$\mu_0 \omega_{\bar{x}_3} + \mu \Delta \omega - \hat{\nabla}_h \pi = r_h, \quad (11)$$

$$\operatorname{div}_h \vec{\omega} = r_{2h}, \quad \pi_{x_3} = r_{3h}$$

для  $\vec{\omega}$  выполняется условие (8), (9), где

$$\vec{\omega} = (v_1 - u_1, v_2 - u_2, v_3 - u_3), \quad \omega = (v_1 - u_1, v_2 - u_2)$$

$$-r_h = \mu_0 v_{\bar{x}_3} + \mu \Delta_h v - \hat{\nabla} P - f_h,$$

$$-r_{0h} = \operatorname{div}_h v, \quad r_{3h} = P_{x_3} - \rho g,$$

где невязки  $\vec{r}_h = (r_{1h}, r_{2h}, r_{3h})$ .

Рассмотрим вспомогательную разностную задачу

$$\mu_0 z_{\bar{x}_3} + \mu \Delta_h z - \hat{\nabla}_h \varphi = r_h, \quad r_h = (r_{1h}, r_{2h}),$$

$$\vec{r}_h = (r_{1h}, r_{2h}, r_{3h}), \quad (12)$$

$$\varphi_{\bar{x}_3} = r_{3h}, \quad \vec{z} = (z_1, z_2, z_3), \quad \operatorname{div}_h z = r_{0h},$$

$$\sum_{\Omega_4} \varphi h^3 = 0, \quad z = (z_1, z_2),$$

$$z|_{S_h} = 0, \quad z_3|_{x=0} = z_3|_{x=1} = 0,$$

где  $\Omega_h^1$  - те точки  $\bar{\Omega}_h$ , где определен  $\nabla_h \varphi$ .

Будем использовать известную оценку [2]

$$\|\varphi\|_{L_2(\Omega_h)}^0 \leq \sup_{\|\psi\|_{W_2(\Omega_h)}^0 = 1} (\nabla \varphi, \psi)_{\Omega_h^1} \leq$$

$$\leq \aleph_4^1 \sup_{\|\psi\|_1=1} (\varphi, \operatorname{div}_h \psi)_{\Omega_h^0}, \quad (13)$$

$W_2^0(\Omega_h)$  - тот класс векторов функции, где сама сеточная функция и ее разностный аналог первого производного принадлежат  $L_2(\Omega_h)$ , и на границах  $S_h$  обращаются в ноль. В дальнейшем все постоянные зависят от данных задачи и постоянные неравенства вложения обозначим через  $C$ . Умножим (1.21) на  $\vec{z} h^3$  суммируем по точкам  $\Omega_h$  в результате получим

$$\|z\|_1^2 - (\varphi, \operatorname{div}_h z)_{\Omega_h^0} = (\vec{r}, z)_{\Omega_h}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \left| (\varphi, \operatorname{div}_h z)_{\Omega_h^0} \right| \leq \|\varphi\|_{L_2(\Omega_h^0)} \|\operatorname{div}_h z\|_{\Omega_h^0} \leq \\ & \leq \|\varphi\| \|r_{0h}\|, \end{aligned} \quad (15)$$

$$|(\vec{r}, z)_{\Omega_h}| \leq \|\vec{r}\| \|z\|.$$

Используем неравенство Фридрихса

$$\|z\| \leq C_\Omega \|z\|_1, \quad (16)$$

и неравенство Гельдера из (14)-(16) получим

$$\|z\|_1^2 \leq C \|\vec{r}_h\|^2 + \|\varphi\| \|r_{0h}\|. \quad (17)$$

Учитывая, оценку (13), оцениваем  $\nabla_h \varphi$  в негативной норме в уравнении (12)

$$\|\varphi\| \leq C (\|z\|_1 + \|\vec{r}\|). \quad (18)$$

Отсюда из (17), (18) получим

$$\|\varphi\|^2 + \|z\|_1^2 \leq C (\|\vec{r}_h\|^2 + \|r_{0h}\|^2) \leq Ch^2. \quad (19)$$

Умножим (19) на  $\vec{\omega}$ , суммируем по  $\Omega_h$  и используя неравенство Гельдера имеем

$$\|\omega\|_1^2 \leq |(\pi, \operatorname{div} \vec{\omega})_{\Omega_h^0}| + |(\vec{r}_h, \vec{\omega})|,$$

используя неравенство (13), оцениваем

$$\|\pi\| \leq C (\|\omega\|_1 + \|\vec{r}_h\| + \|r_{0h}\|)$$

Рассуждая также, как при получении оценки (19) выводим

$$\|\omega\|_1^2 \leq C (\|\vec{r}_h\|^2 + \|r_{0h}\|^2).$$

Из последних неравенств следует, что

$$\|\mathcal{Q} - P\|^2 + \|u - v\|_1^2 \leq C \left( \sum_{i=1}^3 \|r_{ih}\|^2 \right) \leq Ch^2.$$

Теорема 1 доказана.

### Итерационный метод по физическим факторам.

Рассмотрим полуявный итерационный метод

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} &= \mu_0 u_{x_3 \bar{x}_3}^n + \mu \Delta_h u^n - \tilde{f}_h, \\ \sum_{k=1}^N \hat{\operatorname{div}}_h u^{n+1} &= 0, \\ \mathbf{B} \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} + \hat{\nabla}_h \xi^{n+1} &= 0, \\ \mathbf{B} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \mu_0 u_{x_3 \bar{x}_3}^n + \mu \Delta_h u^n - \hat{\nabla}_h \xi^{n+1} - \tilde{f}_h, \end{aligned} \quad (23)$$

$$u^{n+1} = 0 \text{ на } S_h, \quad u^0 = u_0, \quad x \in \Omega_h, \quad (24)$$

схема (20), (21) эквивалентна схеме

$$\sum_{k=1}^N \hat{\operatorname{div}}_h u^{n+1} = 0, \quad \xi_{x_3}^{n+1} = 0, \quad (25)$$

с условиями (24).

Введем пространство

$$\begin{aligned} V_h^1(\Omega_h) &= \left\{ \|\cdot\|_1 \leq C < \infty, \quad \sum_{k=1}^N \hat{\operatorname{div}}_h u h_k = 0, \right. \\ &\quad \left. u = 0 \text{ на границе } S_h \right\}, \end{aligned}$$

и пусть  $B$  - положительный ограниченный оператор, определенный на  $V_h^1(\Omega)$ . Схему (25), (24) можно записать в операторной форме

$$\mathbf{B} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \mathbf{A} u^n - \tilde{f}_h. \quad (26)$$

Оператор  $A$  - проекция оператора  $\mu_0 u_{x_3 \bar{x}_3} + \mu \Delta_h u^n - \hat{\nabla}_h \xi^{n+1}$  в пространство  $V_h^1(\Omega_h)$ . Предложим, что

$$\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B, \quad \gamma_1, \gamma_2 \quad (27)$$

положительные постоянные.

Из общей теории итерационных методов легко доказывается [1]:

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия (27). Тогда схема простой итерации (26) сходится к решению задач (20)-(22).

$$\|u - u^{n+1}\| \leq q^n \|u - u_0\|, \quad q = \frac{1 - \aleph}{1 + \aleph}, \quad \aleph = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

Для простоты предположим, что  $B=E$ , тогда

$$\min\{\mu_0, \mu\} C_\Omega E = A \leq \max\{\mu_0, \mu\} \frac{4}{h^2} E,$$

$$\gamma_1 = \min\{\mu_0, \mu\} C_\Omega, \quad \gamma_2 = \max\{\mu_0, \mu\} \frac{4}{h^2},$$

$$\aleph = \frac{\min\{\mu_0, \mu\} C_\Omega}{\max\{\mu_0, \mu\} 4/h^2}.$$

Схема (23) реализуется следующим образом.

Находим из первого уравнения (24)  $u^{n+1/2}$ , с третьего уравнения (24) для  $\xi^{n+1}$ , получаем уравнения Пуассона с условием типа Неймана.

Отсюда находим  $\xi^{n+1}$ . Затем снова обращаемся к третьему уравнению (24), и найдем  $u^{n+1}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. С. 590.
2. Кобельков Г.М. О численных методах решения уравнений Навье-Стокса в переменных скорости-давления // Вычислительные процессы и системы. Вып. 8. Наука, 1991. С. 204-230.

## Резюме

Бұл жұмыста мұхиттың сзықтық модельінің айрымдық сұлбасының жинақтылығы зерттелінген. Мұхит модельгін сзықтық айрымдық тендеуінің итерациялық өдісінің физикалық факторлар бойынша жинақтылығы зерттелінген.

## Summary

In work convergence of computing circuits of linear model of ocean is studied. Convergence of an iterative method under physical factors for the linear net equations of model of ocean is investigated.

Кокшетауский университет,  
КазНУ им. аль-Фараби

Поступила 2.03.08 г.