А. А. АДАМОВ

ПРОЦЕССЫ ПРОТАИВАНИЯ ГРУНТА

(Представлена академиком НАН РК М. О. Отелбаевым)

Изучена нелинейная задача распределения температуры в многослойном грунте. Проведены численные эксперименты и выявлены некоторые закономерности протаивания многослойного грунта.

Рассматривается **обобщенная задача Стефана [4]** для кондуктивного механизма переноса тепловой энергии, поступившего в данный объем породы через контактный слой. В зависимости температурного признака воды в промерзающих и протаивающих грунтах выделяют три зоны – талого грунта, фазовых переходов и мерзлого грунта. Это нашло свое отражение в том, что границами зон являются θ – изотерма талой зоны, θ_1 – изотерма мерзлой зоны.

Математическая модель изучаемой задачи в одномерной форме имеет следующий вид [4]:

$$\gamma_0 C_m \frac{\partial T_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial z}\right); \quad 0 < z < h(t),$$

$$\gamma_0 C_ф \frac{\partial T_ф}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T_ф}{\partial z}\right); \quad \mathrm{h(t)} < \mathrm{z} < \mathrm{h}_1(t), \quad (1)$$

$$\gamma_0 C_м \frac{\partial T_м}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_м \frac{\partial T_м}{\partial z}\right); \quad \mathrm{h}_1(\mathrm{t}) < \mathrm{z} < H.$$

Здесь индекс «т» показывает, что данная величина относится к талой зоне, «ф» – к зоне фазовых переходов, «м» – к зоне мерзлого грунта. Положение изотерм θ и θ_1 в пространстве не остается постоянным, так как температурное поле грунта меняется. Обозначим через $h(t)$ координату z изотермы θ, а через $h_1(t)$ – изотермы θ_1, h и h_1 будут функциями времени t. Взаимное тепловое влияние зон друг на друга заключается в том, что на подвижных границах $h(t)$ и $h_1(t)$ обязательно должны выполняться условия непрерывности поля температуры

$$z = h(t), \quad \mathrm{T_т}(h,t) = \theta, \quad \mathrm{T_ф}(h,t) = \theta,$$

$$z = h_1(t), \quad \mathrm{T_м}(h,t) = \theta_1, \quad \mathrm{T_ф}(h,t) = \theta_1 \qquad (2)$$

и условия сохранения энергии. Для того чтобы выразить последнее в аналитическом виде, предположим, что при переходе от талой зоны к зоне фазовых переходов количество незамерзшей воды $\omega_н$ меняется на величину $\Delta\omega_н$ не скачком, а постепенно, в некоторой малой области ($h(t)+\varepsilon$, $h(t)-\varepsilon$) таким образом, что при $h(t)-\varepsilon$ и температуре $T(h-\varepsilon,t) = \theta + \frac{1}{2}\Delta T$, $\omega_н = \omega$ и при $h(t)+\varepsilon$ и температуре $T(h+\varepsilon,t) = \; \theta - \frac{1}{2}\Delta T,$ $\omega_н \quad \omega - \Delta\omega_н$. Поскольку $T(h,t) = \theta$, то

$$z = h(t), \quad \frac{\partial T}{\partial z}\frac{dh}{dt} + \frac{\partial T}{\partial t} = 0,$$

что после подстановки в (1) дает

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{z}}\right) = -\gamma_0 \mathrm{C_{эф}} \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{dt}}. \qquad (3)$$

Интегрируя (3) в пределах от $h+\varepsilon$ до $h-\varepsilon$ и применяя теорему о среднем, приведем его к виду

$$\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right)_{h+\varepsilon} - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) =$$

$$= \gamma_0 \left(C\Delta T + q_0 \frac{d\omega}{dT}_{н} \Delta T\right)_{z=\xi} \frac{dh}{dt},$$

где $h+\varepsilon \ge \xi \ge h-\varepsilon$ и $\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right)_{h+\varepsilon}$ имеет смысл количества тепла, притекающего к поверхности $z=h(t)$ из зоны фазовых переходов, а $\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right)_{h-\varepsilon}$ – количества тепла, уходящего от поверхности $h-\varepsilon$ в зону талого грунта. В силу непрерывности поля температур $\Delta T \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Однако величина $\frac{d\omega_н}{dT}\Delta T$ при этом остается конечной и равной $\Delta\omega_н$, так как $\omega_н(T)$ при $T = \theta$ имеет разрыв непрерывности.

Учитывая это, окончательно получим

$$z = h(t), \quad \lambda_{\text{ф}} \frac{\partial T_{\phi}}{\partial z} - \lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial z} = p \frac{dh}{dt},$$

где

$$p = q_0 \gamma_0 \Delta\omega_{н}. \qquad (4)$$

Проводя аналогичные рассуждения для второй границы, найдем

$$z = h_1(t), \quad \lambda_{\text{ф}} \frac{\partial T_{\phi}}{\partial z} - \lambda_{м} \frac{\partial T_m}{\partial z} = 0, \qquad (5)$$

поскольку на ней скачок льдистости отсутствует. При промерзании и протаивании грунта происходит гистерезис величины p:

1) случае промерзания

$$p = q_0 \gamma_0 \left[\omega_m(h,t) + \Delta_2\omega - \omega_{нсв}\right];$$

2) в случае протаивания

$$p = q_0 \gamma_0 \left[\omega(h,t) - \omega_{нсв}\right].$$

Процесс распространения тепла протекает во времени. Чтобы определить состояние тела в некоторый момент времени, необходимо знать распределение температуры во всем его объеме в какой-нибудь предшествующий момент, принимаемый за начальный t=0. Другими словами, необходимо знать начальные условия задачи, т. е.

$$h(0) = h_0 \ge 0, \quad \text{h}_1(0) = h_1 \ge h_0 \ge 0,$$

$$T_m(0) = f_m(z), \; 0 < \text{z} < \text{h}_0,$$

$$T_{\phi}(0) = f_{\phi}(z), \; \text{h}_0 < z < h_1, \qquad (6)$$

$$T_{м}(0) = f_{м}(z), \; \text{h}_1 < \text{z} < H.$$

Чтобы рассчитать, как и в каком направлении развивается интересующий нас процесс внутри тела, необходимо знать, как протекает процесс его взаимодействия с окружающей средой, т. е. установить граничные условия задачи.

В нашем случае считается, что на поверхности земли происходит обмен температуры с окружающей средой. Это условие записывается в виде

$$z = H, \quad \frac{\partial T}{\partial z} + \alpha_{в}\left(T - T_{в}(t)\right) = 0, \qquad (7)$$

где $\alpha_{в}$ и $T_{в}$ – соответственно коэффициент теплоотдачи в окружающую среду и температура окружающей среды. В данном случае в качестве окружающей среды взят воздух. Экспериментально установлено, что на некоторой глубине (от поверхности земли) температура земли – постоянная величина. Поэтому на глубине H температура считается постоянной т.е.

$$T\big|_{z=0} = T_1 = \text{const}. \qquad (8)$$

В итоге получена задача (1)–(8). Данная задача решается в неоднородной среде. Поэтому при решении задачи (1)–(8) кроме условия (4), (5) на изотермах ставятся внутренние краевые условия на границах перехода из одной среды в другую, т.е.

$$\left[\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\right]\Bigg|_{z=z_i} = 0, \quad \left[T\right]_{z=z_i} = 0, \; i = 1,2,...,k, \qquad (9)$$

где k – количество слоев неоднородного грунта; $[f] = f(z_i + 0) - f(z_i - 0)$ – скачок функций в точках $z = z_i$. Следует отметить, что пространственное положение внутренних граничных условий (4), (5) меняется в зависимости от времени, а пространственное положение условий (9) остается постоянным. Кроме этого коэффициенты

$$\gamma_0 = \gamma_0(\omega), C = C(T,\omega), \lambda = \lambda(T,\omega)$$

являются нелинейными функциями от температуры, влажности и времени, где ω – влажность грунта. В настоящей работе изучаются изотермы талой и мерзлой зоны многослойного грунта при протаивании грунта.

Как было показано Л. И. Рубинштейном [4] и А. Мейрмановым [5], дифференциальные уравнения, характеризующие механизм распространения тепла с постоянными параметрами, и условия однозначности, характеризующие конкретную обстановку исследуемого процесса, представляют собой замкнутую систему уравнений, которая имеет только одно решение, описывающее именно данное конкретное явление. Им же было доказано, что система уравнений Стефана сформулирована корректно (и что она действительно имеет решение). Для обобщенной задачи Стефана (1)–(9) такого доказательства пока не существует. Одним наиболее эффективным методом решения задачи (1)–(9) является метод сеток. В работе Б. Рысбайулы, А.А. Адамов [5] доказана сходимость решений приближенной разностной задачи к решению дифференциальной задачи (1)–(9) при $\Delta t \to 0, \quad \Delta \text{h} \to 0$. Изменения изотермы талой и мерзлой зоны при промерзании грунта изучена в работе А. А. Адамова [6].

Актуальность. Умение своевременно решать поставленную задачу позволяет прогнозировать влияние погодных условий и сезона года на различные надземные и подземные производственные сооружения.

Приближенная задача. Пусть глубина грунта составляет H, м, а процесс изучается в течении времени T_0, ч. Отрезок (0; H) разбиваем на N равных частей с шагом $\Delta h = \dfrac{1}{N}$, а отрезок $(0, T_0)$ – на М равных частей с шагом $\Delta t = T_0/M$.

В дальнейшем будем пользоваться следующими сетками:

$$\omega_h = \{z_i = i\Delta h, \; i = 1,2,\ldots,N-1\},$$

$$\omega_h^1 = \{z_{i-1/2} = (i-1/2)\Delta h, \quad i = 1,2,\ldots,N\},$$

$$\omega_\tau = \{t_j = j\Delta t, \quad j = 0,1,\ldots,M\},$$

$$\varpi_h = \bigcup_i z_i \cup \{z = h(t)\} \cup \{x = h_1(t)\}.$$

Сеточный аналог функций T определяют в узлах ϖ_h, а функцию λ – в узлах ω_h^1. Обозначим $y_i^j = y$, $y_i^{j+1} = \hat{y}$ – значения искомой сеточной функций y в точках (x_i, t_j), $\lambda_{i-\frac{1}{2}}^j = \lambda$, $C_{i-\frac{1}{2}}^j = C$, $\gamma_{i-\frac{1}{2}}^j = \gamma$ – значения коэффициентов теплопроводности, теплоемкости и объемного веса в точках $(z_{i-1/2}, t_j)$. В полученной сеточной области рассмотрим следующую разностную задачу:

$$\gamma_0(C + \delta(y-\theta)P)y_{\bar t} = (\lambda y_{\bar z})_z,$$

$$y_0 = T_1, \quad \lambda y_{N\bar z} + \alpha(y_N - T_b) = 0, \qquad (10)$$

где $y = y_i^j$, $i = 1,2,\ldots,2N-1$; $j = 1,2,\ldots,M$ – значение сеточной функции y в точке (x_i, t_j); а $\delta(T)$ – дельта-функция Дирака. При таком построении схемы условия (4), (5), (9) выполняются автоматически.

Численный эксперимент. В настоящей работе приводятся некоторые результаты численных экспериментов, с помощью которых получена динамика изотермы талой и мерзлой зоны при протаивании многослойного грунта. В качестве экспериментальной зоны взят трехслойный грунт: верхний слой – земля толщиной 1 м с влажностью 28%, второй слой – песок толщиной 1 м с влажностью 28%, а третий слой – глина толщиной 3 м с различной глубиной промерзания.

На рис. 1, 2 показана динамика изменения изотерм θ и θ_1 в зависимости от времени. Сначала решается задача промерзания грунта под действием отрицательной температуры окружающей среды. Используя эти данные в качестве начальных данных, исследуем динамику протаивания грунта при плюсовой температуре окружающей среды. Левая зона ограниченной замкнутой линией является зоной мерзлого грунта, правая зона является зоной талого грунта и, наконец, средняя зона между левой и правой является фазовой зоной протаивающего грунта. На рисунке левая кривая показывает границу мерзлой зоны (изо-

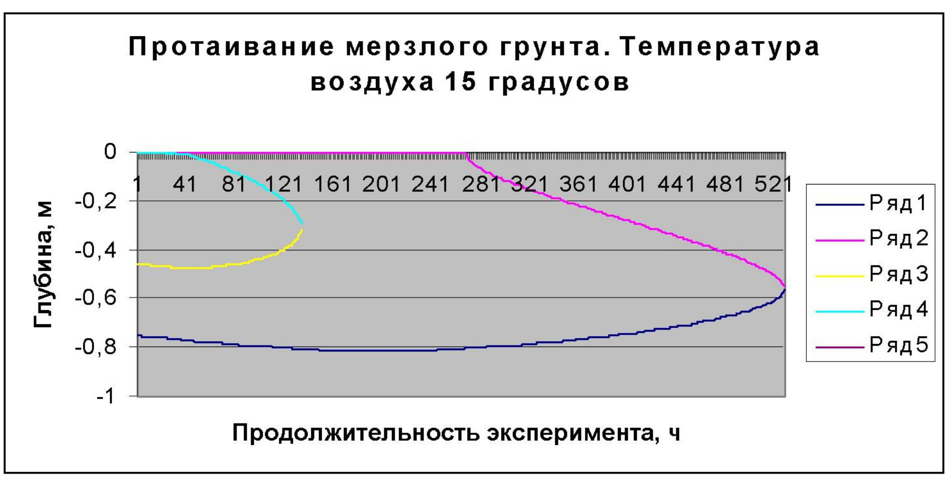

Рис. 1. Протаивание мерзлого грунта при глубине мерзлой зоны 0, 44 м