УДК 517.968.72

Д. С. ДЖУМАБАЕВ, Э. А. БАКИРОВА

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предлагается метод исследования и решения линейной двухточечной краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений, основанный на разбиении интервала и введении дополнительных параметров. В терминах матриц дифференциальной части, интегрального члена и граничных условий установлены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи.

На отрезке $[0, T]$ рассматривается двухточечная краевая задача для систем интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^T K(t,s)x(s)ds + f(t), \quad x \in R^n, \quad \|x\| = \max_{i=1,n} |x_i|, \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in R^n, \tag{2}$$

где $A(t), f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, $K(t,s)$ непрерывна на $[0,T]\times[0,T]$.

Известные методы исследования краевых задач для систем интегро-дифференциальных уравнений [1, 2] позволяют получить лишь достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2). В [3] задача (1), (2) аппроксимируется краевой задачей для нагруженных дифференциальных уравнений и в терминах аппроксимирующих краевых задач установлен критерий ее корректной разрешимости. В [4] установлено, что однозначная разрешимость задачи (1),(2) эквивалентна обратимости матрицы $Q_{**}(h)$ при некотором $h > 0 : Nh = T$, где $Q_{**}(h)$ составляется по фундаментальной матрице дифференциальной части (1) и матрицам $K(t, s)$, B, C.

В настоящей работе необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости получены в терминах исходных данных задачи (1), (2) без использования фундаментальной матрицы.

По шагу $h>0$: $Nh = T$ производится разбиение $[0,T) = \bigcup_{r=1}^{N}[(r-1)h, rh)$ и сужение функции $x(t)$ на r-ый интервал $[(r-1)h, rh)$ обозначается через $x_r(t)$.

Введя параметры $\lambda_r = x_r[(r-1)h]$ и на каждом r-ом интервале произведя замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$ получаем краевую задачу с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)[u_r + \lambda_r] + \sum_{j=1}^{N}\int_{(j-1)h}^{jh} K(t,s)[u_j(s) + \lambda_j]ds + f(t), \quad t \in [(r-1)h, rh), \tag{3}$$

$$u_r[(r-1)h] = 0, \quad r = \overline{1,N}, \tag{4}$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_N + C\lim_{t\to T-0} u_N(t) = d, \tag{5}$$

$$\lambda_s + \lim_{t\to sh-0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \quad s = \overline{1,N-1}. \tag{6}$$

Специальная задача Коши (3), (4) при фиксированных значениях $\lambda \in R^{nN}$ эквивалентна системе интегральных уравнений

$$u_r(t) = \int_{(r-1)h}^{t} A(\tau)u_r(\tau)d\tau + \int_{(r-1)h}^{t} A(\tau)\lambda_r d\tau + \int_{(r-1)h}^{t}\sum_{j=1}^{N}\int_{(j-1)h}^{jh} K(\tau,s)u_j(s)dsd\tau +$$

$$+ \int_{(r-1)h}^{t}\sum_{j=1}^{N}\int_{(j-1)h}^{jh} K(\tau,s)\lambda_j dsd\tau + \int_{(r-1)h}^{t} f(\tau)d\tau, \; t \in [(r-1)h, rh), \; r = \overline{1,N}. \tag{7}$$

В первом слагаемом вместо $u_r(\tau)$, $r = \overline{1,N}$, подставив соответствующую правую часть (7), повторив этот процесс $\nu \in \mathrm{N}$ раз, получим представление $u_r(t)$ вида

$$u_r(t) = D_{\nu r}(t)\lambda_r + \sum_{j=1}^{N} H_{\nu rj}(t)\lambda_j + G_{\nu r}(u,t) + P_{\nu r}(Ku,t) + F_{\nu r}(t), \quad t \in [(r-1)h, rh), \tag{8}$$

где

$$D_{\nu r}(t) = \sum_{i=0}^{\nu-1}\int_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1)\ldots\int_{(r-1)h}^{\tau_i} A(\tau_{i+1})d\tau_{i+1}\ldots d\tau_1,$$