Д. С. ДЖУМАБАЕВ, Е. БОЛГАНИСОВ

(Институт математики и математического моделирования МОН РК , Алматы, Республика Казахстан,

Алматинский технико-экономический колледж путей сообщения, Алматы, Республика Казахстан)

РАЗРЕШИМОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Аннотация. Рассматривается линейная задача управления с импульсным воздействием для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма. Получены условия разрешимости рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: линейная, параметры, уравнение, импульс, задача.

Тірек сөздер: сызықтық, параметрлер, теңдеулер, импульс, есеп.

Keywords: linear parameters of the equation, the momentum, the task.

Интегро-дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями часто встречаются в приложениях при описании процессов с существенным изменением состояний в течении малого отрезка времени. При этом интегро-дифференциальное уравнение, краевое условие или условия импульсных воздействии содержат неизвестные параметры, характеризующие те или иные свойства моделируемого процесса.

В настоящей статье рассматривается линейное интегро-дифференциальное уравнение Фред-гольма

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^T K(t,s)x(s)ds + f(t), \quad t \in (0,T) \setminus \{\theta\}, x \in R^n, \tag{1}$$

при $t = \theta \in (0,T)$ подверженное импульсному воздействию

$$B\lim_{t\to\theta-0} x(t) + C\lim_{t\to\theta+0} x(t) + D\mu = d, \quad d \in R^n, \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$x(0) = x^0, \qquad x(T) = x^1. \tag{3}$$

Здесь $A(t)$, $K(t,s)$ – непрерывны на $[0,T]$, $[0,T]\times[0,T]$ соответственно, $f(t)$ – непрерывен на $[0,T]$ и неизвестный параметр $\mu \in R^n$. Матрицы B,C,D и векторы d, x^0, x^1 – заданы.

Пара $(\mu^*, x^*(t))$, где $\mu^* \in R^n$, $x^*(t)$ – кусочно-непрерывная на $[0,T]$, кусочно-непрерывно дифференцируемая на $(0,T)$ функция, называется решением задачи (1)-(3), если функция $x^*(t)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению (1), краевым условиям (3) и при $\mu = \mu^*$ условию импульсного воздействия (2).

Задачу (1)-(3) можно рассматривать как задачу управления импульсным воздействием. Если процесс описывается интегро-дифференциальным уравнением (1) при $t \in (0,T) \setminus \{\theta\}$ и имеет на-чальное состояние x^0, то надо выбрать значение параметра $\mu \in R^n$ так, чтобы этот процесс с течением времени T имел желаемое состояние x^1.

Вопросы существования решения краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма, содержащих параметры, исследованы в [1-3].

Краевые задачи с параметрами для дифференциальных уравнений рассмотрены многими авто-рами (см. [4], [5] и литературу в них).

Целью работы является нахождение условий разрешимости, в том числе однозначной разрешимости задачи (1)-(3). С этой целью используется метод и результаты [6].

Интервал $[0,T)$ разобьем на две части $[0,T) = [0,\theta) \cup [\theta,T)$. Сужение функции $x(t)$ на $[0,\theta)$ обозначим через $x_1(t)$, сужение на $[0,\theta)$ через $x_2(t)$. Введем дополнительный параметр λ как значение функции $x_2(t)$ при $t = \theta$ и на каждом интервале произведем замену функции $u_1(t) = x_1(t) - x^0$, $u_2(t) = x_2(t) - \lambda$.

Тогда задача (1)-(3) перейдет к эквивалентной краевой задаче с параметрами:

$$\frac{du_1}{dt} = A(t)(u_1 + x^0) + \int_0^\theta K(t,s)[u_1(s) + x^0]ds + + \int_\theta^T K(t,s)[u_2(s) + \lambda]ds + f(t), \quad t \in [0,\theta), \tag{4}$$

$$\frac{du_2}{dt} = A(t)(u_2 + \lambda) + \int_0^\theta K(t,s)[u_1(s) + x^0]ds + + \int_\theta^T K(t,s)[u_2(s) + \lambda]ds + f(t), \quad t \in [\theta,T), \tag{5}$$

$$u_1(0) = 0, \qquad u_2(\theta) = 0, \tag{6}$$

$$B\lim_{t\to\theta-0} u_1(t) + C\lambda + D\mu = d - Bx^0, \tag{7}$$

$$\lambda + \lim_{t\to T-0} u_2(t) = x^1. \tag{8}$$

Решением задачи (4)-(8) является четверка $(\mu, \lambda, u_1(t), u_2(t))$. Если $(\mu^*, \lambda^*, u_1^*(t), u_2^*(t))$ – ре-шение задачи (4)-(8), то пара $(\mu^*, x^*(t))$, где $x^*(t)$, определяемая равенствами: $x^*(t) = x^0 + u_1^*(t)$, $t \in [0,\theta)$, $x^*(t) = \lambda + u_2^*(t)$, $t \in [\theta,T)$, $x^*(T) = \lambda + \lim_{t\to T-0} u_2^*(t)$ будет решением задачи (1)-(3). Введе-ние параметра λ и произведенные замены функций, а также первое условие из (3) позволили получить начальные условия (6) для функции $u_1(t)$, $u_2(t)$.

При известном значении параметра λ задача (4)-(6) называется специальной задачей Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений (см. [6]).

Задача (4)-(6) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$u_1(t) = X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)\left\{\int_0^\theta K(\tau,s)u_1(s)ds + \int_\theta^T K(\tau,s)[u_2(s)+\lambda]ds\right\}d\tau +$$

$$+ X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)\left\{A(\tau)x^0 + \int_0^\theta K(\tau,s)dsx^0 + f(\tau)\right\}d\tau, \quad t\in[0,\theta), \tag{9}$$

$$u_2(t) = X(t)\int_\theta^t X^{-1}(\tau)\left\{\int_0^\theta K(\tau,s)u_1(s)ds + \int_\theta^T K(\tau,s)[u_2(s)+\lambda]ds\right\}d\tau +$$

$$+ X(t)\int_\theta^t X^{-1}(\tau)\left\{A(\tau)\lambda + \int_0^\theta K(\tau,s)dsx^0 + f(\tau)\right\}d\tau, \quad t\in[\theta,T), \tag{10}$$

где $X(t)$ – фундаментальная матрица дифференциальной части уравнения (1).

В (9), (10), предполагая $t=\tau,\ \tau=\tau_1$, умножив обе части на $K(t,\tau)$, интегрируя на $[0,\theta]$, $[\theta,T]$ и суммируя получим

$$\left\{\int_0^\theta K(t,\tau)u_1(\tau)d\tau + \int_\theta^T K(t,\tau)u_2(\tau)d\tau\right\} =$$

$$= \int_0^\theta K(t,\tau)X(\tau)\int_0^\tau X^{-1}(\tau_1)\left\{\int_0^\theta K(\tau_1,s)u_1(s)ds + \int_\theta^T K(\tau_1,s)[u_2(s)+\lambda]ds\right\}d\tau_1 d\tau +$$

$$+ \int_0^\theta K(t,\tau)X(\tau)\int_0^\tau X^{-1}(\tau_1)\left\{A(\tau_1)x^0 + \int_0^\theta K(\tau_1,s)dsx^0 + f(\tau_1)\right\}d\tau_1 d\tau +$$

$$+ \int_\theta^T K(t,\tau)X(\tau)\int_\theta^\tau X^{-1}(\tau_1)\left\{\int_0^\theta K(\tau_1,s)u_1(s)ds + \int_\theta^T K(\tau_1,s)[u_2(s)+\lambda]ds\right\}d\tau_1 d\tau +$$

$$+ \int_\theta^T K(t,\tau)X(\tau)\int_\theta^\tau X^{-1}(\tau_1)\left\{A(\tau_1)\lambda + \int_0^\theta K(\tau_1,s)dsx^0 + f(\tau_1)\right\}d\tau_1 d\tau; \tag{11}$$

На $[0,T]\times[0,T]$ равенствами $M(\Delta_2(\theta),t,\tau) = \int_\tau^\theta K(t,\tau_1)X(\tau_1)d\tau_1 X^{-1}(\tau),\ t\in[0,T],\ \tau\in[0,\theta)$, $M(\Delta_2(\theta),t,\tau) = \int_\tau^T K(t,\tau_1)X(\tau_1)d\tau_1 X^{-1}(\tau),\ t\in[0,T],\ \tau\in[\theta,T]$ определим непрерывную по $t\in[0,T]$ и кусочно-непрерывную по $\tau\in[0,T]$ квадратную матрицу размерности n и введем обозначения

$$\Phi(\Delta_2(\theta),t) \overset{1}{=} \int_0^{\theta} K(t,s)u_1(s)ds + \int_{\theta}^{T} K(t,s)u_2(s)ds\,.$$

Теперь уравнение (11) записывается в виде интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\Phi(\Delta_2(\theta),t) = \int_0^{T} M(\Delta_2(\theta),t,\tau)\Phi(\Delta_2(\theta),\tau)d\tau +$$

$$+ D(\Delta_2(\theta),t)\lambda + F(\Delta_2(\theta),t), \quad t \in [0,T], \tag{12}$$

где

$$D(\Delta_2(\theta),t) = \int_0^{\theta} K(t,\tau)X(\tau)\int_0^{\tau} X^{-1}(\tau_1)\int_{\theta}^{T} K(\tau_1,s)ds d\tau_1 d\tau +$$

$$+ \int_{\theta}^{T} K(t,\tau)X(\tau)\int_{\theta}^{\tau} X^{-1}(\tau_1)\left[A(\tau_1) + \int_{\theta}^{T} K(\tau_1,s)ds\right]d\tau_1 d\tau;$$

$$F(\Delta_2(\theta),t) = \left\{\int_0^{\theta} K(t,\tau)X(\tau)\int_0^{\tau} X^{-1}(\tau_1)\left[A(\tau_1) + \int_0^{\theta} K(\tau_1,s)ds\right]d\tau_1 d\tau +\right.$$

$$\left. + \int_{\theta}^{T} K(t,\tau)X(\tau)\int_{\theta}^{\tau} X^{-1}(\tau_1)\int_0^{\theta} K(\tau_1,s)ds d\tau_1 d\tau\right\}x^0 +$$

$$+ \int_0^{\theta} K(t,\tau)X(\tau)\int_0^{\tau} X^{-1}(\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1 d\tau + \int_{\theta}^{T} K(t,\tau)X(\tau)\int_{\theta}^{\tau} X^{-1}(\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1 d\tau.$$

Пусть уравнение (12) однозначно разрешима и $\Gamma(\Delta_2(\theta),t,s;1)$ – резольвента Фредгольма для этого интегрального уравнения. Тогда единственное решение интегрального уравнения (12) записывается в виде

$$\Phi(\Delta_2(\theta),t) = \int_0^{T} \Gamma(\Delta_2(\theta),t,s;1)\left[D(\Delta_2(\theta),s)\lambda + F(\Delta_2(\theta),s)\right]ds +$$

$$+ D(\Delta_2(\theta),t)\lambda + F(\Delta_2(\theta),t) \quad t \in [0,T]. \tag{13}$$

Подставляя правую часть (13) в (9), (10) получим решение специальной задачи Коши с пара-метрами:

$$u_1(t) = X(t)\int_0^{t} X^{-1}(\tau)\{D(\Delta_2(\theta),\tau)\lambda + F(\Delta_2(\theta),\tau) +$$

$$\left. + \int_0^{T} \Gamma(\Delta_2(\theta),\tau,s;1)\left[D(\Delta_2(\theta),s)\lambda + F(\Delta_2(\theta),s)\right]ds\right\}d\tau + X(t)\int_0^{t} X^{-1}(\tau)\int_0^{T} K(\tau,s)ds d\tau\lambda +$$

$$+X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)\left\{\left[A(\tau)+\int_0^\theta K(\tau,s)ds\right]x^0+f(\tau)\right\}d\tau,\quad t\in[0,\theta), \tag{14}$$

$$u_2(t)=X(t)\int_\theta^t X^{-1}(\tau)\{D(\Delta_2(\theta),\tau)\lambda+F(\Delta_2(\theta),\tau)+$$

$$+\int_0^T \Gamma(\Delta_2(\theta),\tau,s;1)[D(\Delta_2(\theta),s)\lambda+F(\Delta_2(\theta),s)]ds\Big\}d\tau+X(t)\int_\theta^t X^{-1}(\tau)[A(\tau)+$$

$$+\int_\theta^T K(\tau,s)ds\Big]d\tau\lambda+X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)\left[\int_0^\theta K(\tau,s)dsx^0+f(\tau)\right]d\tau,\quad t\in[\theta,T]. \tag{15}$$

Из (14), (15) определим $\lim\limits_{t\to\theta-0}u_1(t)$, $\lim\limits_{t\to T-0}u_2(t)$ и, подставив им соответствующие выражения в ус-ловия импульсного воздействия (7) и краевое условие (8), получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров $\lambda\in R^n$, $\mu\in R^n$:

$$BX(\theta)\int_0^\theta X^{-1}(\tau)\left[D(\Delta_2(\theta),\tau)+\int_0^T\Gamma(\Delta_2(\theta),\tau,s;1)D(\Delta_2(\theta),s)ds+\int_\theta^T K(\tau,s)ds\right]d\tau\lambda+$$

$$+C\lambda+D\mu=d-Bx^0-BX(\theta)\int_0^\theta X^{-1}(\tau)\Big[F(\Delta_2(\theta),\tau)+\int_0^T\Gamma(\Delta_2(\theta),\tau,s;1)F(\Delta_2(\theta),s)ds+$$

$$+\left(A(\tau)+\int_0^\theta K(\tau,s)ds\right)x^0+f(\tau)\Big]d\tau, \tag{16}$$

$$\Big\{I+X(T)\int_\theta^T X^{-1}(\tau)\Big[D(\Delta_2(\theta),\tau)+\int_0^T\Gamma(\Delta_2(\theta),\tau,s;1)D(\Delta_2(\theta),s)ds+A(\tau)+$$

$$+\int_\theta^T K(\tau,s)ds\Big]d\tau\Big\}\lambda=x^1-X(T)\int_\theta^T X^{-1}(\tau)[F(\Delta_2(\theta),\tau)+$$

$$=\int_0^T\Gamma(\Delta_2(\theta),\tau,s;1)F(\Delta_2(\theta),s)ds+\int_0^\theta K(\tau,s)ds\cdot x^0+f(\tau)\Big]d\tau. \tag{17}$$

Систему уравнении (16), (17) запишем в виде:

$$Q_*(\Delta_2(\theta))\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}=-F_*(\Delta_2(\theta)). \tag{18}$$

Здесь блочные элементы матрицы $Q_*(\Delta_2(\theta))=\begin{pmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\ Q_{21} & Q_{22}\end{pmatrix}:R^{2n}\to R^{2n}$ определяются равенст-вами:

$$Q_{11} = BX(\theta)\int_0^{\theta} X^{-1}(\tau)\left[D(\Delta_2(\theta),\tau) + \int_0^T \Gamma(\Delta_2(\theta),\tau,s;1)D(\Delta_2(\theta),s)ds + \int_{\theta}^T K(\tau,s)ds \right]d\tau + C,$$

$$Q_{21} = I + X(T)\int_{\theta}^T X^{-1}(\tau)\left[D(\Delta_2(\theta),\tau) + \int_0^T \Gamma(\Delta_2(\theta),\tau,s;1)D(\Delta_2(\theta),s)ds + A(\tau) + \int_{\theta}^T K(\tau,s)ds \right]d\tau,$$

$Q_{12} = D$, $Q_{22} = 0$, координаты вектора $F_*(\Delta_2(\theta)) \in R^{2n}$ определяются правой частью системы (16), (17).

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Пусть интегральное уравнение Фредгольма второго рода (12) однозначно разре-шима. Тогда*

а) задача (1)-(3) разрешима тогда и только тогда, когда вектор $F_*(\Delta_2(\theta)) \in R^{2n}$ *ортогонален к ядру транспонированной матрицы* $\left(Q_*(\Delta_2(\theta))\right)'$;

б) задача (1)-(3) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда матрица $Q_*(\Delta_2(\theta)) : R^{2n} \to R^{2n}$ *обратима.*

ЛИТЕРАТУРА

1 Nesterenko O.B. Iteration method for the solution of integro-differential equations with constraints // Nonlinear Oscilla-tions. – 2007. – Vol. 10, N 3. – P. 339-350.

2 Luchka A.Yu., Nesterenko O.B. Projection method for the solution of integro-differential equations with restrictions and control // Nonlinear Oscillations. – 2008. – Vol. 11, N 2. – P. 219-228.

3 Luchka A.Yu., Nesterenko O.B. Construction of solutions of integro-differential equations with restrictions and control by projection-iterative method // Nonlinear Oscillations. – 2009. – Vol. 12, N 1. – P. 85-93.

4 Samoilenko A.M., Ronto N.I., Ronto V.A. Dvukhtochechnaya kraevaya zadacha c parametrom v kraevikh usloviyakh // Doklady AN Ukrainskoi SSR. Ser. fiz.-matem. i tekhn. nauki. – 1985. – T. 7. – S. 22-26.

5 Dzhumabaev D.S., Minglibaeva B.B. Korrectnaya razreshimost' lineinoi dvukhtochechnoi kraevoi zadachi c parametrom // Matematicheski zhurnal. – 2004. – T. 4, N 1. – S. 41-51.

6 Dzhumabaev D.S. A method for solving the linear boundary value problem for an integro-differential equation // Computational mathematics and mathematical physics. – 2010. – Vol. 50, N 7. – P. 1150-1161.

Резюме

Д. С. Жұмабаев, Е. Болғанысов

(ҚР БҒМ Математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы, Қазақстан Республикасы,

Алматы жол қатынастары техника-экономикалық колледжі, Алматы, Қазақстан Республикасы)

ИМПУЛЬСТІК ӘСЕРІ БАР ФРЕДГОЛЬМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУІ ҮШІН ПАРАМЕТРЛІ СЫЗЫҚТЫ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІЛІМДІЛІГІ

Импульстік әсері бар Фредгольм интегро-дифференциалдық теңдеуі үшін сызықты басқару есебі қарас-тырылады. Қарастырылып отырған есептің шешілімділігінің шарттары алынған.

Тірек сөздер: сызықтық, параметрлер, теңдеулер, импульс, есеп.

Summary

D. S. Dzhumabaev, E. Bolganisov

(Institute of mathematics of the Ministry of Education And Science of The Republic of Kazakhstan, Almaty,

Almaty technical and economic college of means of communication, Almaty, Republic of Kazakstan)

A SOLVABILITY OF LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH PARAMETER

FOR IMPULSIVE FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Linear problem of control by impulse effect to Fredholm integro-differential equation is considered. Solvability conditions of considering problem are obtained.

Keywords: linear parameters of the equation, the momentum, the task.

Поступила 2.09.2013г.