

УДК 523.4

А. В. РЕПНЕВ

РАСЧЁТ ПОТЕНЦИАЛА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЯДРА КРАСНОГО ГИГАНТА СО СВОЕЙ ЗВЕЗДОЙ

Получена полуаналитическая зависимость потенциала взаимодействия ядра красного гиганта входящего в кратную систему от его смещения вследствие гравитационного возмущения со стороны спутников.

Для вывода уравнений движения тел в кратной системе, с учётом предполагаемого смещения ядра красного гиганта необходимо знание зависимости потенциала взаимодействия ядра со своей звездой [1-4]. Выведем, эту зависимость, воспользовавшись тем, что взаимодействие точечного объекта и шара описывается выражением для двух точечных объектов. Для этого мысленно разобьём весь объём звезды, исключая ядро, являющееся шарообразным недеформируемым телом, на малые элементы, которые можно считать точечными объектами (рис. 1).

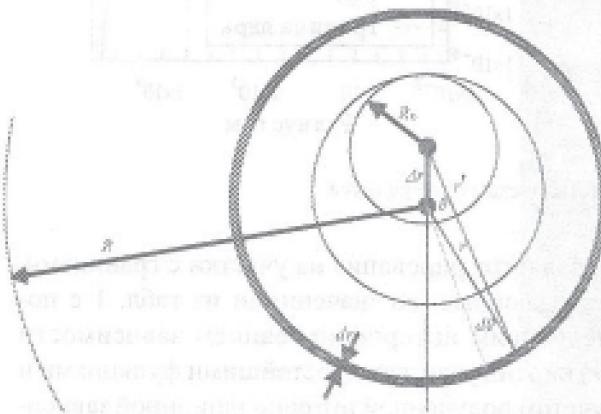


Рис. 1. К выводу выражения

для потенциала взаимодействия

Выражение для потенциальной энергии взаимодействия dU ядра и малого элемента имеет

$$\text{вид } dU = -\frac{Gm_0 dm}{r'}, \text{ где } G - \text{ гравитационная}$$

постоянная, m_0 – масса ядра, dm – масса выделенного элемента звезды, r' – расстояние между центром ядра и рассматриваемым элементом. В сферической системе координат, связанной с геометрическим центром звезды (совпадающим с центром масс в случае несмещённого ядра), объём элемента равен $r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta$, а его масса $\rho(r) r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta$, где $\rho(r)$ – плотность вещества

звезды на расстоянии r от начала координат, dr – толщина элемента, $r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta$ – площадь основания элемента. Тогда выражение для потенциала взаимодействия ядра и элемента запишется в виде

$$dU = -\frac{Gm_0 \rho(r) r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta}{r'}. \quad (1)$$

В (1) переменные θ и r' связаны друг с другом. Чтобы проинтегрировать (1), необходимо исключить одну из них. Исключим θ . Стороны треугольника r, r' , и Δr (рис. 1), согласно теореме косинусов, связаны соотношением $r'^2 = r^2 + \Delta r^2 - 2r\Delta r \cos \theta$, где Δr – смещение ядра. Продифференцировав это выражение, получим $2r'dr' = 2r\Delta r \sin \theta d\theta$, откуда

$\sin \theta d\theta = \frac{r'dr'}{r\Delta r}$. Сделав согласно этому выражению замену в (1), получим

$$dU = -\frac{Gm_0 \rho(r) r d\phi dr' dr}{\Delta r}. \quad (2)$$

Разобьём область $0 \leq r \leq R$ на две части. I часть – сферическая область с центром в начале координат, в пределах которой может находиться ядро при своём движении; область ограничена сферой радиусом, равным сумме радиуса ядра R_0 и его смещения Δr . II часть – вся остальная часть звезды. С учётом сказанного, выражение для потенциальной энергии взаимодействия ядра и звезды запишется в виде

$$U(\Delta r) = - \int_{R_0 - \Delta r}^{R_0 + \Delta r} \int_{r=0}^{r+\Delta r} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{Gm_0 \rho(r) r}{\Delta r} d\phi dr' dr - \\ - \int_{R_0 + \Delta r}^{R} \int_{r=\Delta r}^{r+\Delta r} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{Gm_0 \rho(r) r}{\Delta r} d\phi dr' dr, \quad (3)$$

где R – радиус звезды. Интегрирование по переменным ϕ и r' даёт

$$U(\Delta r) = -2\pi G m_0 \times \quad (4)$$

$$\times \left(\int_{R_0-\Delta r}^{R_0+\Delta r} \frac{\rho(r)(r + \Delta r - R_0)r}{\Delta r} dr + 2 \int_{R_0+\Delta r}^R \rho(r) r dr \right).$$

Чтобы пронтегрировать (4) по переменной

Таблица

$r, \text{ м}$	0	$8,38 \cdot 10^7$	$1,24 \cdot 10^8$	$1,51 \cdot 10^8$	$1,85 \cdot 10^8$	$4,40 \cdot 10^{10}$	$1,32 \cdot 10^{11}$	$2,36 \cdot 10^{11}$	$3,01 \cdot 10^{11}$	$3,31 \cdot 10^{11}$	$3,50 \cdot 10^{11}$
$c, \text{ кг}/\text{м}^3$	10^{10}	10^8	10^7	10^6	10^5	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}

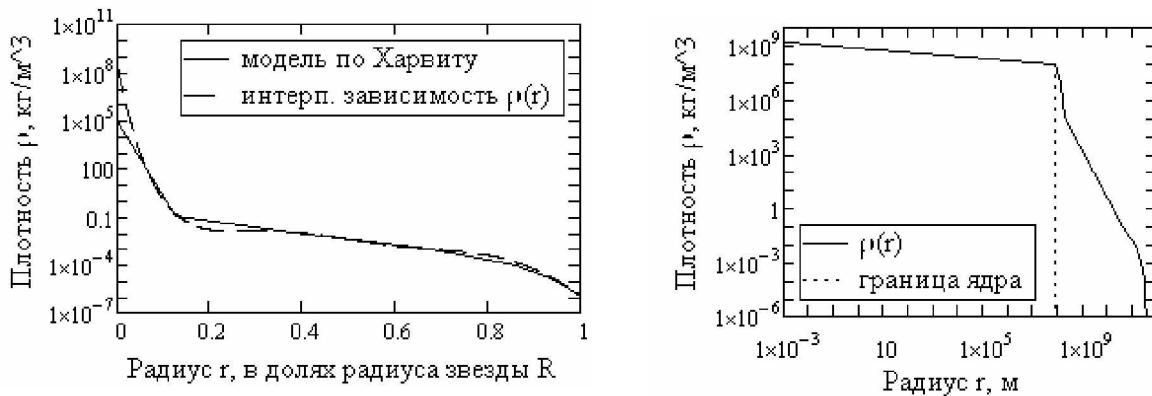


Рис. 2. Зависимость плотности вещества звезды от ее радиуса

Так как различие плотностей в разных слоях красного гиганта достигает шестнадцати порядков, то в обычном масштабе графическое представление зависимости $c(r)$ не отображает всех ее качественных характеристик. Поэтому на левой панели рис. 2 ось ординат, на которой отложены значения плотности звезды, представлена в логарифмическом масштабе, а расстояние от центра звезды выражено в долях радиуса звезды. На правой панели рис. 2 та же зависимость отражена в логарифмическом масштабе по всем осям координат. Как видно из данных рисунков, функция $c(r)$ имеет сложный характер с изломами и резкими спадами. Первый излом на правой панели рис. 2, отмеченный штриховой линией, указывает на изменение фазового состояния вещества звезды, то есть на границу ядра, а второй излом – по-видимому, на внешнюю границу энерговыделяющего слоя.

Задачу взятия интеграла (4) можно решить двумя путями. Первый путь – разбить весь ин-

тервал интегрирования на участки с границами, совпадающими со значениями из табл. 1 с последующим интерполированием зависимости $c(r)$ на этих участках простейшими функциями и с учетом полученной интерполяционной зависимости взять интеграл (4) в соответствующих пределах интегрирования с дальнейшим суммированием результатов интегрирования по всем участкам. Второй путь – интерполировать зависимость $c(r)$ на всём интервале интегрирования более сложной аналитической функцией с последующим интегрированием по (4) в исходных пределах интегрирования. Второй путь предпочтительнее в силу следующих причин. Во-первых, оба предела интегрирования первого слагаемого и нижнего предела второго слагаемого правой части (4) зависят от смещения ядра Δr . А поскольку в случае аналитического вывода зависимости $U(\Delta r)$ конкретное значение смещения ядра заранее неизвестно, то неизвестны и участки области интегрирования, на которые попадают

указанные пределы интегрирования, а соответственно неизвестны и функции, интерполирующие зависимость $c(r)$ на этих участках, что не позволяет аналитически вычислить интеграл (4). В случае численного расчёта $U(\Delta r)$ необходимо согласовывать участки интегрирования, а, следовательно, интерполирующие функции с пределами интегрирования, зависящими от Δr . Указанных проблем можно избежать, если область интегрирования разбить таким образом, чтобы пределы интегрирования, зависящие от Δr , заведомо находились на одном участке, в пределах которого зависимость $c(r)$ интерполирована одной функцией. Однако, такой выход неочевиден, так как требует заведомого знания области смещения ядра. Как видно из вышеизложенного, первый способ расчета предполагает достаточно сложный алгоритм для его исполнения. Во-вторых, кусочное интерполирование зависимости $c(r)$ простыми функциями, не позволяет полноценно судить о её качественных и количественных характеристиках. Кроме того, зависимость $c(r)$ понадобится в последующих расчётах избытка энерговыделения. Поэтому разумно иметь в распоряжении эту зависимость в виде аналитической зависимости. По этим причинам был выбран второй путь расчёта интеграла (4). После перебора ряда как можно более простых интерполирующих функций, для интерполяции $c(r)$ была выбрана следующая экспоненциальная зависимость, которую без излишней математической строгости будем обозначать также как $c(r)$

$$\rho(r) = \rho_0 e^{a_1 r^6 + a_2 r^5 + a_3 r^4 + a_4 r^3 + a_5 r^2 + a_6 r}, \quad (5)$$

где коэффициенты в (5) для модели в соответствии с [5] следующие: $\rho_0 = 1.759 \cdot 10^7 \text{ кг}/\text{м}^3$ – центральная плотность ядра, $a_1 = 302,228 \text{ м}^{-1}$, $a_2 = 1,685 \cdot 10^3 \text{ м}^2$, $a_3 = -4,63 \cdot 10^3 \text{ м}^3$, $a_4 = 6,584 \cdot 10^3 \text{ м}^4$, $a_5 = -4,654 \cdot 10^3 \text{ м}^5$, $a_6 = 1,286 \cdot 10^3 \text{ м}^6$. С учетом (5) интеграл (4) целесообразно рассчитывать численно, так как аналитическое выражение получается столь громоздким, что становится практически бесполезным в дальнейших расчетах. Численный расчет дал зависимость, изображенную на рис. 3, которая легко интерполируется квадратичной зависимостью.

С учетом постоянного множителя в (4) потенциал взаимодействия можно записать в виде

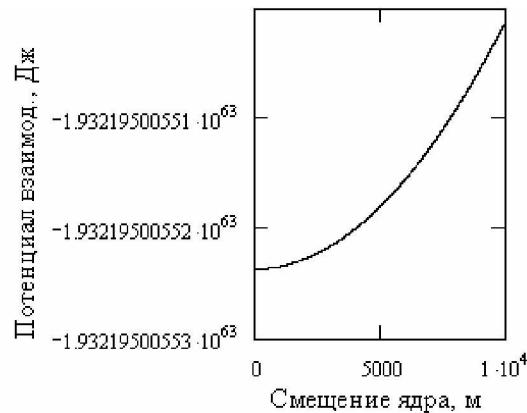


Рис. 3. Зависимость потенциала взаимодействия от смещения ядра

$$U(\Delta r) = -2\pi G m_0 \rho_0 (b_2 r^2 + b_1 r + b_0), \quad (6)$$

где коэффициенты в скобках следующие:

$$b_0 = 3,023 \cdot 10^{18} \text{ кг}/\text{м}, \quad b_1 = -1 \text{ м}, \quad b_2 = -0,349.$$

ЛИТЕРАТУРА

- Солововник А.А., Репнёв А.В. Гравитационные эффекты в кратных звёздных системах как причина звёздной нестационарности. Алматы: НЦ НТИ, 2010. С. 87.
- Солововник А.А., Репнёв А.В. Расчет смещения ядра красного гиганта в тройной звёздной системе // Мат-лы республ. научно-практ. конф. «Козыбаевские чтения - 2009». Петропавловск, 2009. С. 42-46.
- Солововник А.А., Агафонов О.А. Причины нестационарности некоторых долгопериодических переменных звёзд // Мат-лы Междунар. научно-практ. конф. Алматы: КазНУ, 2001. Т. IV. С. 16-20.
- Герасимов И.А., Мухашлов Б.Р., Рыхлова Л.В. О некоторых эффектах приливной эволюции в системе Земля – Луна – Солнце // Астрономический журнал. 1999. № 10. С. 793-800.
- Harwit G. Astrophysical Concept. New York: Springer-Verlag, 1991. P. 626.

Резюме

Спутниктер тарарапынан гравитациялық кернеулік салдарынан оның жылжуынан еселік жүйесіне кіретін алтың қызыл ядроның потенциалдың жартылай аналитикалық тәуелділігі алынады.

Summary

We have obtained the semianalytic dependence potential of interaction of the core of the red giant entering the multiple system on its displacement as a result of gravitational excitation of the satellites.

Северо-Казахстанский государственный университет им. М. Козыбаева,
г. Петропавловск

Поступила 12.07.10 г.