

К. Б. АМИРТАЕВ<sup>1</sup>, Л. К. НАЙЗАБАЕВА<sup>2</sup>, Г. ТУРКЕН<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Международный Казахско-Турецкий университет им. Х. А. Ясави, Туркестан, Казахстан,

<sup>2</sup>Институт информационных и вычислительных технологий МОН РК, Алматы, Казахстан,

<sup>3</sup>Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан)

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАВИСИМОСТИ УДЛИНЕНИЯ СТЕРЖНЯ ПО ЕГО ДЛИНЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛООВОГО ПОТОКА

**Аннотация.** В статье исследуется зависимость удлинения стержня по его длине при наличии теплового потока, теплообмена и растягивающей силы. Исследовано воздействие теплового потока на удлинение стержня. Получен закон распределения поля температур в фиксированных точках стержня. Выведен график зависимости удлинения стержня на его длину за счет растягивающей силы и поля температуры. С помощью численных методов получены результаты в цифровом виде и показаны в виде таблиц.

**Ключевые слова:** тепловой поток, теплообмен, растягивающие силы.

**Тірек сөздер:** жылу ағыны, жылуалмасу, созушы күш.

**Keywords:** elastic deformation, thermo elastic strain, functional, heat isolation, heat exchange.

Рассмотрим стержень ограниченной длины  $L$  (см). Площадь поперечного сечения  $F$  (см<sup>2</sup>) постоянна по длине. Модуль упругости материала стержня  $E$  (кГ/см<sup>2</sup>), коэффициент теплопроводности материала стержня  $K_{xx}$ , (Вт/(см<sup>2</sup>·°С)), коэффициент теплового расширения  $\alpha$  (1/°С).

Боковая поверхность стержня полностью теплоизолирована. Верхний конец стержня жестко зашпелен, а на нижнем конце приложена осевая растягивающая сила  $P$  (кГ) (рисунок 1).

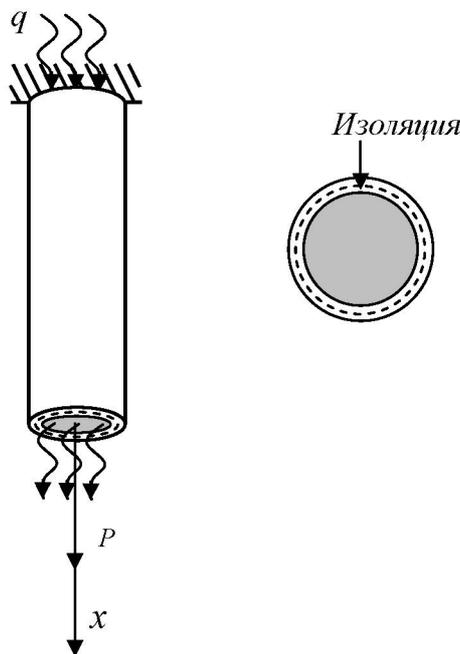


Рисунок 1 – Расчетная схема

На площадь поперечного сечения зашпеленного верхнего конца подведен тепловой поток  $q$  (Вт/см<sup>2</sup>). А через площадь поперечного сечения нижнего конца, где приложена осевая растягивающая сила  $P$  (кГ), происходит теплообмен с окружающей средой. Здесь температуру окружающей среды обозначим через  $T_{oc}$  (°С), коэффициент теплопроводности материала стержня через  $K_{xx}$  (Вт/см<sup>2</sup>·°С), а коэффициент теплообмена с окружающей средой соответственно  $h$  (Вт/см<sup>2</sup>·°С).

Теперь исследуем зависимость удлинения стержня за счет данного теплового потока  $q$ , теплообмена с окружающей средой и растягивающей силы  $P$  на начальную длину стержня.

Обозначим площадь поперечного сечения через  $S_1^{(1)}$ , которая соответствует точке  $x_i = 0$  первого элемента. На этот площадь подведен тепловой поток  $q$ . Тогда для первого элемента вид функционала, выражающий полную тепловую энергию будет следующим

$$I_1 = \int_{V^{(1)}} \frac{K_{xx}}{2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV + \int_{S_1^{(1)}} q T dS, \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{n}, \quad (1)$$

где  $V^{(1)}$  – объем первого конечного элемента,  $K_{xx}$  – коэффициент теплопроводности материала стержня. А также здесь учитывается, что боковая поверхность первого элемента теплоизолирована. Для остальных внутренних  $(n - 2)$  конечных элементов вид соответственного функционала будет следующим

$$I_i = \int_{V^{(i)}} \frac{K_{xx}}{2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV, \quad I_i = \int_{V^{(i)}} \frac{K_{xx}}{2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV, \quad i = 2 \div (n-1). \quad (2)$$

Через площадь поперечного сечения, которая соответствует точке  $x = L$  самого последнего  $n$ -ого конечного элемента, происходит теплообмен с окружающей средой. Коэффициент теплообмена  $h$ , а температура окружающей среды  $T_{oc}$ , тогда для этого конечного элемента соответствующее выражение функционала имеет следующий вид

$$I_n = \int_{V^{(n)}} \frac{K_{xx}}{2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV + \int_{S_{n+1}^{(n)}} \frac{h}{2} (T - T_{oc})^2 dS, \quad \frac{L}{n}(n-1) \leq x \leq L, \quad (4)$$

где  $S_{n+1}^{(n)}$  – площадь поперечного сечения соответствующей точке  $x = L$  стержня.

Тогда для всего стержня вид функционала, выражающий полную тепловую энергию будет следующим

$$I = \sum_{i=1}^n \int_{V^{(i)}} \frac{K_{xx}}{2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV + \int_{S_1^{(1)}} q T dS + \int_{S_{n+1}^{(n)}} \frac{h}{2} (T - T_{oc})^2 dS, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (5)$$

Итак, число конечных элементов стержня будет  $n$ , а число узловых точек будет равно  $(2n + 1)$ . Поэтому минимизируя функционал (5) по значениям температуры  $T_1, T_2, \dots, T_{(2n+1)}$  в узловых точках, построим следующую систему линейных алгебраических уравнений состоящих из  $(2n + 1)$  уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial T_i} = 0, \quad i = 1 \div (2n + 1). \quad (6)$$

Пусть значения параметров выражающих физико-механические свойства материала стержня будут следующими  $K_{xx} = 72 \text{ (Вт/см}^\circ\text{C)}$ ,  $\alpha = 125 \cdot 10^{-7} \text{ (1/}^\circ\text{C)}$ ,  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ (кг/см}^2\text{)}$ ,  $F = 20 \text{ (см}^2\text{)}$ ,  $P = 1000 \text{ (кг)}$ ,  $q = -150 \text{ (Вт/см}^2\text{)}$ ,  $h = 8 \text{ (Вт/см}^2\text{) }^\circ\text{C}$ ,  $T_{oc} = 20 \text{ (}^\circ\text{C)}$ .

Значение длины стержня  $L$  будет разными

1)  $L = 80 \text{ (см)}$ , 2)  $L = 60 \text{ (см)}$ , 3)  $L = 40 \text{ (см)}$ , 4)  $L = 20 \text{ (см)}$ .

Рассмотрим несколько примеров. Если длина стержня будет  $L = 80 \text{ см}$ , тогда в точке  $x = 0$ , где подведен тепловой поток, значение температуры будет  $T(x=0) = T_1 = 205,4167 \text{ (}^\circ\text{C)}$ . А также удлинение стержня за счет поля температуры будет  $\Delta l_T = 0,12208 \text{ (см)}$ , а удлинение за счет силы  $P = 1000 \text{ (кг)}$  будет  $\Delta l_p = 0,000667 \text{ (см)}$ . Тогда удлинение стержня в целом будет  $\Delta l = \Delta l_T + \Delta l_p = 0,12275 \text{ (см)}$  (таблица 1). А также объем стержня будет  $V = FL = 20 \cdot 80 = 1600 \text{ (см}^3\text{)}$ . Поле распределения температуры по длине стержня приведено на рисунке 2.

Таблица 1 – Закон распределения поля температур в фиксированных точках стержня при  $L = 80$  см

T1= 205,4166667	T350= 169,0625000	T700= 132,6041667	T1050= 96,1458333	T1400= 59,6875000
T50= 200,3125000	T400= 163,8541667	T750= 127,3958333	T1100= 90,9375000	T1450= 54,4791667
T100= 195,1041667	T450= 158,6458333	T800= 122,1875000	T1150= 85,7291667	T1500= 49,2708333
T150= 189,8958333	T500= 153,4375000	T850= 116,9791667	T1200= 80,5208333	T1550= 44,0625000
T200= 184,6875000	T550= 148,2291667	T900= 111,7708333	T1250= 75,3125000	T1600= 38,8541667
T250= 179,4791667	T600= 143,0208333	T950= 106,5625000	T1300= 70,1041667	T1601= 38,7500000
T300= 174,2708333	T650= 137,8125000	T1000= 101,3541667	T1350= 64,8958333	

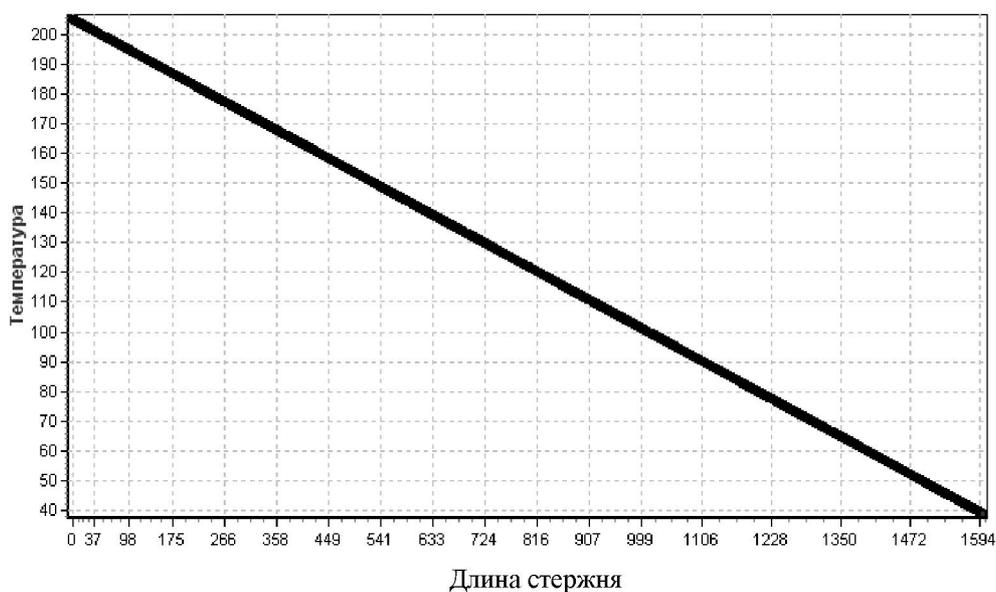


Рисунок 2 – Закон распределения поля температуры по длине стержня при ( $L = 80$  см)

Во втором примере по сравнению с первым длина стержня короче на 25%, то есть  $L = 60$  см. Значение температуры будет  $T(x = 0) = T_1 = 163,75(^{\circ}C)$ . Здесь же удлинение стержня за счет поля температуры по сравнению с удлинением от растягивающей силы будет  $\frac{\Delta l_T}{\Delta l_p} = 151,875$  раз больше. Это соотношение по сравнению с первым будет меньше на 17,065%. (таблица 2). В этом примере поле распределения температуры по длине стержня приведено на рисунке 3.

Таблица 2 – Закон распределения поля температур в фиксированных точках стержня при  $L = 60$  см

T1= 163,7500000	T300= 132,6041667	T600= 101,3541667	T850= 75,3125000	T1100= 49,2708333
T50= 158,6458333	T350= 127,3958333	T650= 96,1458333	T900= 70,1041667	T1150= 44,0625000
T100= 153,4375000	T400= 122,1875000	T700= 90,9375000	T950= 64,8958333	T1200= 38,8541667
T150= 148,2291667	T450= 116,9791667	T750= 85,7291667	T1000= 59,6875000	T1201= 38,7500000
T200= 143,0208333	T500= 111,7708333	T800= 80,5208333	T1050= 54,4791667	
T250= 137,8125000	T550= 106,5625000			

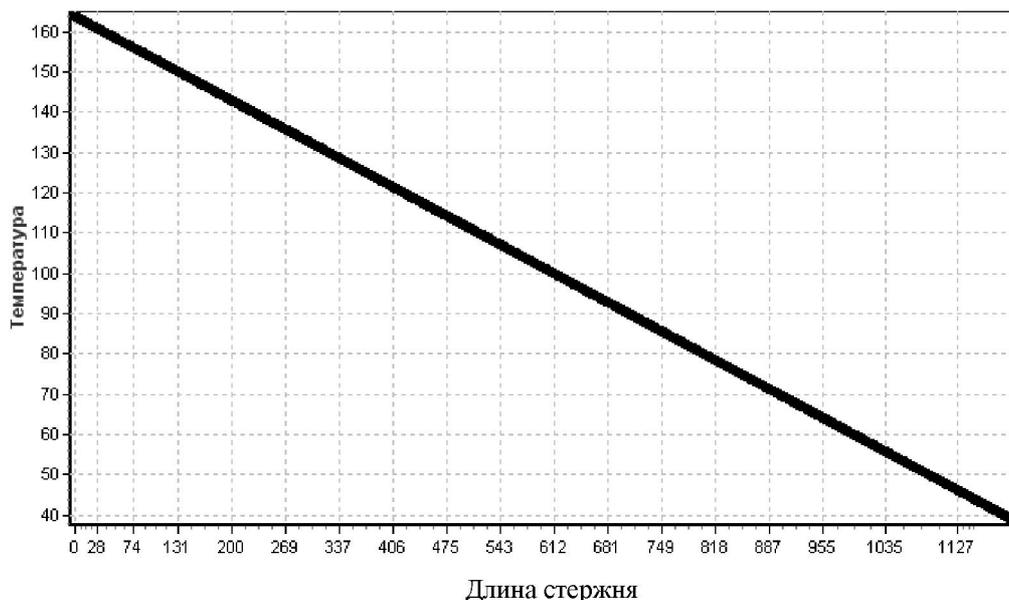


Рисунок 3 – Закон распределения поля температуры по длине стержня при ( $L = 60$  см)

Итак, после исследования для теплоизолированного по боковой поверхности стержня с ограниченной длиной можно построить заключительную таблицу (таблица 3). А также зависимость удлинения стержня от поле температуры на его длину приведена на рисунке 4. Удлинение стержня в целом засчет растягивающей силы и поле температуры показано на рисунке 5.

Таблица 3 – Относительное удлинение стержня

Длина стержня $L$ , см	$\Delta T_t$ , см	$\Delta l_p$ , см	$\Delta l = \Delta T_t + \Delta l_p$ , см	$\Delta T_t$ на сколько раз меньше по сравнению, когда $L = 80$ см	$\Delta T_t$ на сколько раз меньше по сравнению, когда $L = 80$ см
80	0,1220833333	0,0006666667	0,12275	1	1
60	0,0759375	0,0005	0,0764375	1,6077	1,6059
40	0,0402083333	0,0003333333	0,0405416667	3,0363	3,0277
20	0,0148958333	0,0001666667	0,0150625	8,1958	8,15

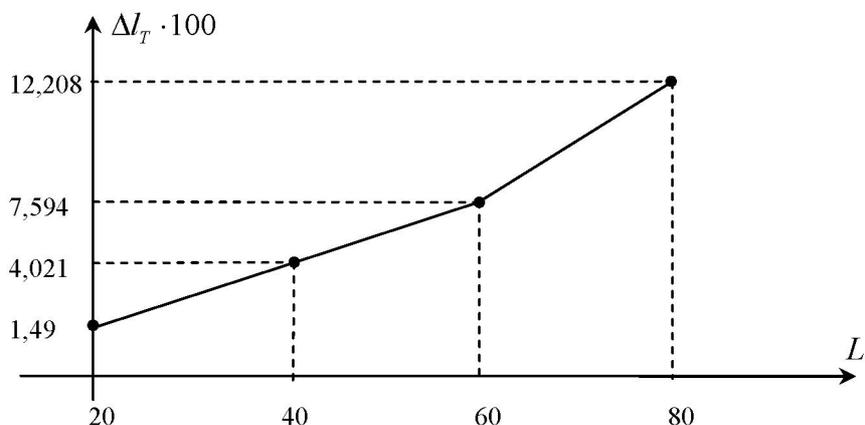


Рисунок 4 –Зависимость удлинения стержня на его длину засчет поля температуры

