Abstract

I. O. Orazov, A. Sh. Shaldanbaev

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan)

ABOUT ONE-DIMENSIONAL LINEARIZED NAVIER-STOKES EQUATIONS

Keywords: the operator of Sturm-Liuvillay,own functions,attached functions.

In the solution of a simplified variant of the task S. A. Lomov method of spectral theory of differential equation with deviating argument.

УДК 517. 9

И. О. ОРАЗОВ, А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан)

О ЛИНЕАРИЗОВАННОМ ОДНОМЕРНОМ УРАВНЕНИИ НАВЬЕ–СТОКСА

Аннотация. В работе решен упрощенный вариант задачи С. А. Ломова методом спектральной теории дифференциальных уравнении с отклоняющимся аргументом.

Ключевые слова: оператор Штурм-Лиувилля, собственные функций, присоединенные функций.

Тірек сөздер: Штурм-Лиувиллдің операторы, меншікті функциялар, қосарлас функциялар.

Keywords: the operator of Sturm-Liuvillay,own functions,attached functions.

В 1979 году в г. Алма-Ате проходила Всесоюзная конференция по асимптотическим методам. На этой конференций С. А. Ломовым была поставлена следующая задача .

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - L(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=1} = 0, \tag{2}$$

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \tag{3}$$

где

$$L(x,t)u = \frac{\partial u}{\partial t} + c(x,t)u. \tag{4}$$

Надо получить регуляризованные асимптотики при $\varepsilon \to 0$ решении задачи (1)+(2).

Впоследствии эта задача вошла в его монографию [1] в качестве одной из не решенных проблем. Задача (1)+(2) с периодическим условием по времени была решена С. А. Ломовым. Периодические условия обеспечивали дискретный спектр оператора, и через спектр была описана сингулярность решения по ε.

Если в уравнении $\varepsilon = 0$, то предельный оператор (4) не имеет спектра, поэтому не ясно, что же в этом случае отвечает за сингулярность решения.

Для прозрачности результатов мы полагаем $\varphi(x) \equiv 0$ и $c(x,t) \equiv 0$ и рассмотрим следующий упрощенный вариант задачи С. А. Ломова.

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_{xx} - u_t = f(x,t), & (5) \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, & (6) \\ u\big|_{t=0} & (7) \end{cases}$$

Для решения поставленной задачи мы применим спектральную теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом [3]. С помощью такого подхода нам удалось получить представление решения задачи С. А. Ломова.

Теорема. Если $f(x,t)$ вещественная непрерывная функция, то решение сингулярно возмущенной задачи С. А. Ломова

$$-\varepsilon^2 u_{xx} + u_t = f(x,t) \qquad 0 \prec t \prec 1,$$

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, \qquad u\big|_{t=0} = 0$$

имеет следующий вид

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) \cdot \varphi_m(t),$$

где

$$\varphi_m(t) = \sqrt{2}\sin\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right)t, \qquad m = 0,1,2,\ldots$$

$$\psi_m(t) = \varphi_m(1-t), \qquad m = 0,1,2,\ldots$$

$$a_m(x) =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{-\dfrac{d_m(1)}{\varepsilon^2} + e^{-k_1^{(m)}}\left(-\dfrac{d_m(0)}{\varepsilon^2} - \dfrac{\int_0^1 \left[\dfrac{\mu_m}{\varepsilon^4} c_m(\xi) - \dfrac{d_m(\xi)}{\varepsilon^2}\right] shk_1^{(m)}\xi d\xi}{}\right)}{\left[\left(\overline{k}_1^{(m)}\right)^2 - \left(k_1^{(m)}\right)^2\right]\left(1 - e^{-2k_1^{(m)}}\right)} \cdot e^{-k_1^{(m)}(1-x)} + \right.$$

$$+ \frac{\int_x^1 \left[\dfrac{\mu_m}{\varepsilon^4} c_m(\xi) - \dfrac{d_m(\xi)}{\varepsilon^2}\right] \cdot e^{-k_1^{(m)}(\xi - x)} d\xi}{2k_1^{(m)}\left[\left(\overline{k}_1^{(m)}\right)^2 - \left(k_1^{(m)}\right)^2\right]\left(1 - e^{-2k_1^{(m)}}\right)} +$$

$$+ \frac{-\dfrac{d_m(0)}{\varepsilon^2} + e^{-\overline{k}_1^{(m)}}\left(-\dfrac{d_m(1)}{\varepsilon^2} - \dfrac{\int_0^1 \left[\dfrac{\mu_m}{\varepsilon^4} c_m(1-\xi) - \dfrac{d_m(1-\xi)}{\varepsilon^2}\right] sh\overline{k}_1^{(m)}\xi d\xi}{\overline{k}_1^{(m)}}\right)}{\left[\left(\overline{k}_1^{(m)}\right)^2 - \left(k_1^{(m)}\right)^2\right] \cdot \left(e^{-2\overline{k}_1^{(m)}} - 1\right)} \cdot e^{-\overline{k}_1^{(m)} x} -$$

$$-\frac{\int_0^x e^{-k_1^{(m)}(x-\varepsilon)}\left[\frac{\mu_m}{\varepsilon^4}c_m(\xi)-\frac{d_m(\xi)}{\varepsilon^2}\right]d\xi}{2\overline{k}_1^{(m)}\left[\left(\overline{k}_1^{(m)}\right)^2-\left(k_1^{(m)}\right)^2\right]}\Bigg],$$

$$f(x,t)=\sum_{m=0}^{+\infty}c_m(x)\psi_m(t)=\sum_{m=0}^{+\infty}d_m(x)\varphi_m(t),$$

$k_1^{(m)}$ – первый корень характеристического уравнения

$$k^4+\frac{\mu_m^2}{\varepsilon^4}=0$$

расположенный в первой четверти,

$$\mu_m=(-1)^m\left(m\pi+\frac{\pi}{2}\right),\qquad m=0,1,2,...;$$

$c_m(x)-m$-ый коэффициент Фурье функций $f(x,t)$ по системе $\{\psi_m(t)\}$,

$d_m(x)-m$-ый коэффициент Фурье функций по системе $\{\varphi_m(t)\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1 Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. –М.: Наука, 1981. – С. 398.

2 Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 494 с.

3 Orazov I., Shaldanbayev A., Shomanbayeva M. About the nature of the spectrum of the periodic problem for the heat equation with a deviating argument, Abstract and Applied Analysis. Vol. 2013 (2013). Article ID 128363, 6 pages, http://dx.doi.org/10.1155/2013/128363

REFERENCES

1 Lomov S.A. Introduction to the general theory of singular perturbations, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.

2 Trenogin V.A. Development and application of the asymptotic Lyusternik-Vishik method. Russian Math. surveys. 25 (1970). P. 119-156.

3 Orazov I., Shaldanbayev A., Shomanbayeva M. About the nature of the spectrum of the periodic problem for the heat equation with a deviating argument, Abstract and Applied Analysis. Vol. 2013 (2013). Article ID 128363, 6 pages, http://dx.doi.org/10.1155/2013/128363

Резюме

И. О. Оразов, А. Ш. Шалданбаев

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік-Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан)

НАВЬЕ–СТОКСТІҢ СЫЗЫҚТЫАРИЗОНДЫҚ БІРӨЛШЕМДІ ТЕҢДЕУЛЕРІ ТУРАЛЫ

Еңбекте аргументі ауытқыйтын дифференциалдық теңдеулердің спектралды теориясы арқылы С. А. Ломовтың есебі шығарылған.

Тірек сөздер: Штурм-Лиувиллдің операторы, меншікті функциялар, қосарлас функциялар.

Поступила 04.07.2014 г.