**REPORTS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN**
ISSN 2224-5227
Volume 5, Number 6 (2014), 11– 14

GENERAL VIEW OF INTEGRALS AT EXPANSION OF DIFFICULT FRACTIONAL FUNCTION ON THE ELEMENTARY

V.P. Malyshev, A.M. Makasheva, Y.S. Zubrina
eia_hmi@mail.ru

Key words: fractional function, expansion, integration, general view.

Abstract. On the basis of well-known private expressions for the expansion of complex fractional functions on the elementary the general view of similar dissociation is presented

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i x)} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} b_i}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(\frac{a_j}{b_j}-\frac{a_i}{b_i}\right)\left(\frac{a_i}{b_i}\pm x\right)},$$

that allows to find the common decision for integral of detailed function

$$\int\frac{dx}{\prod_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i x)} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} b_i}\sum_{i=1}^{n}\frac{\pm\ln\left(\frac{a_i}{b_i}\pm x\right)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(\frac{a_j}{b_j}-\frac{a_i}{b_i}\right)}.$$

The found common decision can be used for mathematical modeling of consecutive destruction of substance in chemical, physical and mechanical processes.

УДК 519.1

ОБЩИЙ ВИД ИНТЕГРАЛОВ ПРИ РАЗЛОЖЕНИИ СЛОЖНОЙ ДРОБНОЙ ФУНКЦИИ НА ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ

В. П. Малышев, А. М. Макашева, Ю. С. Зубрина
eia_hmi@mail.ru

(Представлена член-корр. НАН РК М. Ж. Толымбековым)

Ключевые слова: дробная функция, разложение, интегрирование, общий вид.

Аннотация. На основе известных частных выражений для разложения сложной дробной функции на элементарные представлен общий вид подобного разложения

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i x)} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} b_i}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(\frac{a_j}{b_j}-\frac{a_i}{b_i}\right)\left(\frac{a_i}{b_i}\pm x\right)},$$

что позволяет найти общее решение для интеграла подробной функции

$$\int\frac{dx}{\prod_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i x)} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} b_i}\sum_{i=1}^{n}\frac{\pm\ln\left(\frac{a_i}{b_i}\pm x\right)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(\frac{a_j}{b_j}-\frac{a_i}{b_i}\right)}.$$

Найденное общее решение задачи может быть использовано для математического моделирования последовательной деструкции вещества в химических, физических и механических процессах.

Введение

Сложная дробная функция разлагается на элементарные, как указано в [1], в виде тождества, например, для случая

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)} \equiv \frac{A}{x+a}+\frac{B}{x+b}+\frac{C}{x+c}+\frac{D}{x+d}, \qquad (1)$$

где

$$A = \frac{1}{(b-a)(c-a)(d-a)}, B = \frac{1}{(a-b)(c-b)(d-b)} \text{ и т.д.}$$

Общая форма разложения сложной дробной функции и ее интегралы

В общем виде разложение дроби (1) может быть выражено как

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(x+a_i)} \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(a_j - a_i)(x+a_i)}. \qquad (2)$$

Интегрирование такой дроби приводит к результату

$$\int \frac{dx}{\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)} = \int \sum_{i=1}^{n} \frac{dx}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(a_j - a_i)(x+a_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{ln(x+a_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(a_j - a_i)}. \qquad (3)$$

В нашей работе [2] было показано, что можно провести тождественное разложение сложной дроби, содержащей разности $(a_i - x)$:

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)(c-x)(d-x)} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{b-x} + \frac{C}{c-x} + \frac{D}{d-x}, \qquad (4)$$

где *A, B, C* и *D* имеют такое же выражение, как и для (1).

Поэтому общая формула разложения дроби (4) будет иметь вид

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(a_i - x)} \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(a_j - a_i)(a_i - x)}. \qquad (5)$$

При этом интеграл подобной дроби выразится как

$$\int \frac{dx}{\prod_{i=1}^{n}(a_i - x)} = \int \sum_{i=1}^{n} \frac{dx}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(a_j - a_i)(a_i - x)} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{ln(a_i - x)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(a_j - a_i)}. \qquad (6)$$

Сравнивая (2) и (5), (3) и (6), можно рекомендовать формулу для разложения сложной дроби более общего вида, когда в делителе находятся либо только суммы, либо только разности:

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(a_i \pm x)} \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(a_j - a_i)(a_i \pm x)}. \qquad (7)$$

а также ее интеграла

$$\int \frac{dx}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(a_i \pm x)} = \pm \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(a_i \pm x)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(a_j - a_i)}. \qquad (8)$$

Ввиду тождества коэффициентов *A, B, C, D* для сложных дробей вида (1) и (4) полученные выражения (7) и (8) будут справедливы и для произвольного сочетания сомножителей $(a_i + x)$ и $(a_i - x)$ в сложной дроби вида

$$\frac{1}{(a+x)(b-x)(c+x)(d-x)} = \frac{A}{a+x} + \frac{B}{b-x} + \frac{C}{c+x} + \frac{D}{d-x}. \qquad (9)$$

При этом общий знак интеграла (8) будет зависеть от конкретного вида числителя в каждом слагаемом суммы, вследствие чего этот интеграл получает еще более общее выражение

$$\int \frac{dx}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(a_i \pm x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\pm\ln(a_i \pm x)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(a_j - a_i)}. \qquad (10)$$

Помимо этого, в случае присутствия в сложной дроби сомножителей $(a_i \pm b_i x)$ их можно привести к форме (7) путем выноса за скобки коэффициента b_i, и тогда эта форма примет вид

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i x)} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} b_i} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\left(\frac{a_j}{b_j} - \frac{a_i}{b_i}\right)\left(\frac{a_i}{b_i} \pm x\right)}, \qquad (11)$$

как и соответствующий интеграл

$$\int \frac{dx}{\prod_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i x)} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} b_i} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pm \ln(\frac{a_i}{b_i} \pm x)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\frac{a_j}{b_j} - \frac{a_i}{b_i})}. \qquad (12)$$

По-видимому, это наиболее общие выражения для разложения сложной дробной функции на элементарные и для интеграла этой функции, по крайней мере, при первой степени переменной в сомножителях.

Так, приведенное в справочнике [1] разложение дробной функции вида

$$\frac{1}{(a+bx)(f+gx)} = \frac{1}{fb-ag}\left(\frac{b}{a+bx} - \frac{g}{f+gx}\right) \qquad (13)$$

помимо того, что оно относится только к двум сомножителям, представленным только в виде сумм, не может рассматриваться как фрагмент какой-либо общей формулы разложения из-за неопределенности алгоритма появления произведения постоянных величин и знаков вычитания. В то же время сведение данной дроби к общему выражению (11) позволяет получить тот же самый результат по общему алгоритму

$$\frac{1}{(a_1+b_1x)(a_2+b_2x)} = \frac{1}{b_1b_2}\left(\frac{1}{\left(\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(\frac{a_1}{b_1}+x\right)} + \frac{1}{\left(\frac{a_1}{b_1}-\frac{a_2}{b_2}\right)\left(\frac{a_2}{b_2}+x\right)}\right) =$$

$$= \frac{1}{b_1b_2\left(\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_1}{b_1}\right)}\left(\frac{1}{\frac{a_1}{b_1}+x} - \frac{1}{\frac{a_2}{b_2}+x}\right) = \frac{1}{a_2b_1-b_2a_1}\left(\frac{b_1}{a_1+b_1x} - \frac{b_2}{a_2+b_2x}\right),$$

что тождественно (13).

Необходимо отметить, что, как обычно, если в состав первообразной функции (взятого интеграла) входит выражение, содержащее *lnf(x)*, то его следует понимать как *ln|f(x)|* [1], в данном случае как $ln|(\frac{a_i}{b_i} \pm x)|$ в составе (12).

Найденное общее решение задачи по разложению сложной дробной функции на элементарные может быть использовано для математического моделирования последовательной деструкции вещества в физических, химических и механических процессах [2].

Выводы

1. Представлена общая формула для разложения сложной дробной функции на элементарные.
2. Предложено общее выражение для интеграла этой функции.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. – 13-е изд., исправленное. – М.: Наука, Гл. ред. физ. – мат. лит., 1986. – 544с.

[2] Малышев В.П., Турдукожаева (Макашева) А.М., Кайкенов Д.А. Разработка математической модели последовательной деструкции вещества методом прямого интегрирования // Доклады НАН РК. – 2012. – N4. – с. 5-13.

REFERENCES

[1] Bronshtejn I.N., Semendjaev K.A. Spravochnik po matematike dlja inzhenerov i uchashhihsja vuzov. – 13-e izd., ispravlennoe. – M.: Nauka, Gl. red. fiz. – mat. lit., 1986. – 544s.

[2] Malyshev V.P., Turdukozhaeva (Makasheva) A.M., Kajkenov D.A. Razrabotka matematicheskoj modeli posledovatel'noj destrukcii veshhestva metodom prjamogo integrirovanija // Doklady NAN RK. – 2012. – N4. – s. 5-13.

КҮРДЕЛІ БӨЛШЕК ФУНКЦИЯЛАРДЫ ЭЛЕМЕНТАРЛЫҒА ЖІКТЕУ КЕЗІНДЕГІ ИНТЕГРАЛДАРДЫҢ ЖАЛПЫ ТҮРІ

В.П. Малышев, А.М. Мақашева, Ю.С. Зубрина

Тірек сөздер: бөлшек функция, жіктеу, интегралдау, жалпы түр.

Аннотация. Күрделі бөлшек функцияларды элементарлыға жіктеу үшін ұқсас жіктеудің жалпы түрі белгілі жеке өрнектер негізінде көрсетілген:

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i x)} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} b_i} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{a_j}{b_j} - \frac{a_i}{b_i}\right)(\frac{a_i}{b_i} \pm x)},$$

ол, бөлшек функциясы интегралы үшін жалпы шешім табуға мүмкіндік береді

$$\int \frac{dx}{\prod_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i x)} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} b_i} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pm \ln(\frac{a_i}{b_i} \pm x)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\frac{a_j}{b_j} - \frac{a_i}{b_i})}.$$

Есептің табылған жалпы шешімін химиялық, физикалық және механикалық үрдістердегі заттардың құрылымының тізбекті бұзылуын математикалық моделдеу (үлгілеу) үшін қолдануға болады.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ
статьи «Общий вид интегралов при разложении сложной дробной функции на элементарные»

1. Малышев Виталий Павлович – доктор технических наук, профессор, академик Международной академии информатизации, заведующий лаборатории энтропийно-информационного анализа Химико-металлургического института им. Ж. Абишева.
Адрес: Республика Казахстан, 100009,
г. Караганда, ул. Ермекова, 63, ХМИ
e-mail: eia_hmi@mail.ru

2. Макашева Астра Мундуковна – доктор технических наук, доцент, главный научный сотрудник лаборатории энтропийно-информационного анализа Химико-металлургического института им. Ж. Абишева, член-корр. Международной академии информатизации.
Адрес: Республика Казахстан, 100009,
г. Караганда, ул. Ермекова, 63, ХМИ
e-mail: eia_hmi@mail.ru

3. Зубрина Юлия Сергеевна – магистрант 1 курса Карагандинского государственного технического университета, лаборант лаборатории энтропийно-информационного анализа Химико-металлургического института им. Ж. Абишева.
Адрес: Республика Казахстан, 100009,
г. Караганда, ул. Ермекова, 63, ХМИ
e-mail: eia_hmi@mail.ru

Поступила 18.09.14 г.