N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 6, Number 298 (2014), 3 – 7

APPROXIMATION OF CLASSES OF SMOOTH PERIODIC FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES BY WAVELETS

Sh. A. Balgimbayeva, D. M. Nurbayeva, Zh. M. Nurmukhamedova

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: sc_s@mail.ru

Key words: functional space, approximation, wavelet.
Abstract. In the work the problem of approximation by sums of Fourier series with respect to Lizorkin wavelet system for the Nikolsky – Besov class $\mathsf{B}^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n)$ and Lizorkin–Triebel class $\mathsf{F}^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n)$ in norm of another Nikolsky –Besov space $B^t_{q\tau}(\mathbf{T}^n)$ or Lizorkin–Triebel space $F^t_{q\tau}(\mathbf{T}^n)$ is studied for certain relations between the parameters of the class and the space.

УДК 517.5

ПРИБЛИЖЕНИЕ ВСПЛЕСКАМИ КЛАССОВ ГЛАДКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Ш. А. Балгимбаева, Д. М. Нурбаева, Ж. М. Нурмухамедова

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

Представлено академиком НАН РК Н. К. Блиевым

Ключевые слова: функциональное пространство, приближение, всплеск.
Аннотация. Изучается задача приближения классов Никольского–Бесова $\mathsf{B}^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n)$ и Лизоркина–Трибеля $\mathsf{F}^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n)$ суммами Фурье по системе всплесков Лизоркина в норме другого пространства Никольского–Бесова $B^t_{q\tau}(\mathbf{T}^n)$ или Лизоркина –Трибеля $F^t_{q\tau}(\mathbf{T}^n)$ при некоторых соотношениях между параметрами класса и пространства.

Введение. Постановка задачи. Задаче приближения различных классов гладких периодических функций тригонометрическими полиномами в одномерном случае посвящено большое число работ (см., например, [1–4] и др.).

В настоящей работе рассмотрены вопросы приближения классов Никольского – Бесова $\mathsf{B}^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n)$ и Лизоркина–Трибеля $\mathsf{F}^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n)$ периодических функций частными суммами их ряда Фурье по безусловному базису всплесков, которые являются тригонометрическими полиномами.

Введем некоторые обозначения. Пусть $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$ – множества натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел соответственно; $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$; $\mathbf{T}^n = (\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})^n$ – n-мерный тор; $L_p := L_p(\mathbf{T}^n)$ $(1 \le p < \infty)$ – пространство 2π-периодических по каждой переменной функций f, суммируемых в степени p по периоду со стандартной нормой $\|f\|_p$; ℓ_θ $(1 \le \theta \le \infty)$ – пространство числовых последовательностей $\{a_j\}_{j \in \mathbf{N}_0}$ со стандартной нормой $\|\{a_j\}\|_{\ell_\theta}$;

$\ell_\theta(L_p(\mathbf{T}^n))$ – пространство функциональных последовательностей $\{f_k(x)\}_{k \in \mathbf{N}_0}$, $x \in \mathbf{T}^n$, с конечной нормой $\|\{f_k\}|\ell_\theta(L_p)\| = \left\| \left\{ \|f_k|L_p\| \right\} |\ell_\theta \right\|$;

$L_p(\mathbf{T}^n; \ell_\theta)$ – пространство функциональных последовательностей $\{f_k(x)\}_{k \in \mathbf{N}_0}$, $x \in \mathbf{T}^n$, с конечной нормой $\|\{f_k\}|L_p(\mathbf{T}^n; \ell_\theta)\| = \| \, \| \{f_k\}|\ell_\theta \| \, | \, L_p \, \|$ (с обычной модификацией при $\theta = \infty$).

Пусть $D(\mathbf{T}^n) := C^\infty(\mathbf{T}^n)$ – пространство бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций на $\mathbf{T}^n$ (пробных функций); $D'(\mathbf{T}^n)$ – двойственное пространство периодических распределений (обобщенных функций).

Значение распределения $f \in D'(\mathbf{T}^n)$ на пробной функции $g \in D(\mathbf{T}^n)$ будем обозначать через $\langle f, g \rangle$. Тогда коэффициенты Фурье $f \in D'(\mathbf{T}^n)$ задаются соотношением $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-1} \langle f, e^{-i(k,x)} \rangle, k \in \mathbf{Z}^n$, $(k,x) = \sum_{j=1}^n k_j x_j$.

Приведем определение периодических пространств Никольского–Бесова и Лизоркина – Трибеля [3], [5].

Введем разбиение множества $\mathbf{Z}^n$ по диадическим кубам. Пусть $K_0 = \{0 \,|\, 0 = (0,...,0) \in \mathbf{Z}^n\}, K_j = \{k \,|\, k \in \mathbf{Z}^n, |k_m| < 2^j, m = 1,...,n\} \setminus \{k \,|\, k \in \mathbf{Z}^n,$ $|k_m| < 2^{j-1}, m = 1,...,n\}$.

Определение 1. Пусть $s \in \mathbf{R}$, $1 \le p < \infty$, $1 < \theta < \infty$.

i) пространство Никольского-Бесова $B^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n)$ состоит из всех периодических обобщенных функций $f \in D'(\mathbf{T}^n)$ для которых конечна норма

$$\|f|B^s_{p\theta}\| = \left\| 2^{sj} \sum\nolimits_{k \in K_j} \hat{f}(k) e^{i(k,x)} |\ell_\theta(L_p(\mathbf{T}^n)) \right\|; \tag{1}$$

ii) пространство Лизоркина-Трибеля $F^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n)$ состоит из всех периодических обобщенных функций $f \in D'(\mathbf{T}^n)$ для которых конечна норма

$$\|f|F^s_{p\theta}\| = \left\| 2^{sj} \sum\nolimits_{k \in K_j} \hat{f}(k) e^{i(k,x)} |L_p(\mathbf{T}^n, \ell_\theta) \right\|. \tag{2}$$

Классом Никольского – Бесова $\mathsf{B}^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n)$ (Лизоркина – Трибеля $\mathsf{F}^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n)$) будем называть единичный шар пространства $B^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n)$ ($F^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n)$), т.е.

$\mathsf{B}^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n)=\left\{f\in B^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n):\left\|f|B^s_{p\theta}\right\|\le 1\right\}$ $\left(\mathsf{F}^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n)=\left\{f\in F^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n):\left\|f|F^s_{p\theta}\right\|\le 1\right\}\right)$.

В работе [6] дано представление функций из пространства $B^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n)$ с помощью системы функций (типа всплесков) $\Phi:=\{\phi_{\nu r},(\nu,r)\in M\}$, $M=\{(\nu,r)\mid \nu\in\mathbf{N}, r\in\mathbf{N}^n, 0\le r\le N-M\}$:

$$\phi_{\nu r}=\prod_{j\in\mathbf{N}}\left[N_j^\nu-M_j^\nu+1\right]^{-1}\sum_{k=M}^{N}e^{i(k,u)},$$

где $u=x-t^r_{M,N}$, $t^r_{M,N}=\left(\frac{2\pi r_1}{N_1^\nu-M_1^\nu+1},\ldots,\frac{2\pi r_n}{N_n^\nu-M_n^\nu+1}\right)$, $M_j^\nu:=\min_l\left\{2^{\nu-1}(\sigma_j^l-1)\right\}$, $N_j^\nu:=\max_l\left\{2^{\nu-1}(\sigma_j^l+1)\right\}$. Здесь $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ вектор, компоненты которого равны ±1 или ±3, но обязательно один из них равен ±3. Всего таких векторов $\ell_n=4^n-2^n$, т.е. $\sigma^\ell=(\sigma_1^\ell,\ldots,\sigma_n^\ell)$, $\ell=1,\ldots,\ell_n$. Имеем

$$\hat f_\phi(\nu,r)=\sum_{k\in\rho(\nu)}\hat f(k)e^{i(k,t^r_{M,N})}.$$

Рассмотрим (формально) следующие декомпозиции периодического распределения $f\in D'(\mathbf{T}^n)$ по двоичным "пачкам" :

$$f(x)=\hat f(0)+\sum_{\nu\in\mathbf{Z}^n}\delta_\nu(f,x), \tag{3}$$

где $\delta_\nu(f,x)=\sum_{k\in\rho(\nu)}\hat f(k)e^{i(k,x)}$, $\nu\ge1$; $\rho(\nu)=\left\{k\,\middle|\,k\in\mathbf{Z}^n, M^\nu\le k\le N^\nu\right\}$.

Предварительные сведения. Сформулируем некоторые известные факты, которые использованы в работе. Приведем два утверждения из работы [6].

Утверждение 1. Пусть $1<p<\infty$. Тогда для "пачки" $\delta_\nu(f,x)$ ряда Фурье (3) справедливы оценки:

$$A_p^n\left\|\delta_\nu(f,x)\right\|_p\le\left(\prod_{j=1}^n\frac{2\pi}{N_j^\nu-M_j^\nu+1}\right)^{1/p}\left(\sum_{r=0}^{N^\nu-M^\nu}|\hat f_\phi(\nu,r)|^p\right)^{1/p}\le B_p^n\left\|\delta_\nu(f,x)\right\|_p,$$

где постоянные $0\le A_p\le B_p<\infty$ не зависят от ν.

Утверждение 2. Пусть $s\in\mathbf{R}$, $1\le p<\infty$, $1\le\theta<\infty$. Для того чтобы периодическое распределение $f\in D'(\mathbf{T}^n)$ принадлежало пространству $B^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n)$ необходимо и достаточно, чтобы оно представлялось слабосходящимся рядом

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^\infty\sum_{r=0}^{N^\nu-M^\nu}\hat f_\phi(\nu,r)\phi_{\nu r}(x) \tag{4}$$

с коэффициентами $\hat f_\phi(\nu,r)$, удовлетворяющими условию

$$\beta^s_{p\theta}:=\left[\sum_{\nu=1}^\infty2^{\nu s\theta}\left(\prod_{j=1}^n\frac{2\pi}{N_j^\nu-M_j^\nu+1}\right)^{1/p}\left(\sum_{r=0}^{N^\nu-M^\nu}|\hat f_\phi(\nu,r)|^p\right)^{1/p}\right]^{1/\theta}\le\infty$$

При этом ряд (4) сходится по норме $B^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n)$ (при $\theta < \infty$) и величина $\left\{ |\hat{f}_\phi(0,0)|^\theta + (\beta^s_{p\theta})^\theta \right\}^{1/\theta}$ эквивалентна норме f в $B^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n)$.

Далее запись $A \cong B$ означает, что существуют константы $C_1, C_2 > 0$ такие, что $C_1 A \le B \le C_2 A$.

Основные результаты. Изучим задачу приближения функции из класса $B^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n)$ суммами $S_\Delta(f)$ в метрике $L_q(\mathbf{T}^n)$ и $B^t_{q\tau}(\mathbf{T}^n)$. Далее будем обозначать

$$S_\Delta(f) = \sum_{(\nu,r)\in M'} \hat{f}_\phi(\nu,r)\phi_{\nu r}(x),$$

где $M' := \{(\nu,r) : 1 \le \nu \le \nu_\Delta, r = 0,\dots,N^\nu - M^\nu\}$; здесь $\nu_\Delta = [\log_2(\Delta+1)] + 1$ ($[a]$ – целая часть числа $a \in \mathbf{R}$). Для линейного нормированного пространства $X = X(\mathbf{T}^n)$ периодических функций и класса $F \subset X$ обозначим

$$\mathsf{S}_\Delta(F, X) = \sup_{f\in F} \|f - S_\Delta(f)|X\|.$$

Теорема 1. Пусть $1 < p,q < \infty, 1 \le \theta,\tau \le \infty;$ $s \in \mathbf{R}$ такое, что $s > (1/p - 1/q)_+$. Тогда имеют место оценки

$$\mathsf{S}_\Delta(\mathsf{B}^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n), B^t_{q\tau}(\mathbf{T}^n)) \cong 2^{-\nu_\Delta(s-t-(1/p-1/q)_+)}; \tag{5}$$

$$\mathsf{S}_\Delta(\mathsf{B}^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n), L_q(\mathbf{T}^n)) \cong 2^{-\nu_\Delta(s-(1/p-1/q)_+)}. \tag{6}$$

Здесь $a_+ = a$, если $a > 0$ и $a_+ = 0$, если $a \le 0$.

Доказательство. Доказательство использует неравенства Гельдера, Йенсена, неравенство разных метрик Никольского, неравенство Литтлвуда – Пэли, а также теоремы А и В.

Далее рассмотрим задачу приближения в более общем случае.

Теорема 2. Пусть $1 < p,q < \infty,$ $1 \le \theta,\tau \le \infty;$ $s \in \mathbf{R}$ такое, что $s - t > (1/p - 1/q)_+$. Тогда имеет место оценка

$$\mathsf{S}_\Delta(\mathsf{A}^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n), A^t_{q\tau}(\mathbf{T}^n)) \cong 2^{-\nu_\Delta(s-t-(1/p-1/q)_+)}. \tag{7}$$

Здесь A – это либо B, либо F, аналогично A – это либо B, либо F.

Доказательство. Случай, когда A – это B, A – это B, разобран в теореме 1. Далее рассмотрим случай A – это F, A – это F. Оставшиеся случаи пар (B, F); (F, B) разбираются аналогично. Для доказательства воспользуемся оценкой (5) и известными вложениями $B^t_{q\min(q,\tau)}(\mathbf{T}^n) \subset F^t_{q\tau}(\mathbf{T}^n) \subset B^t_{q\max(q,\tau)}(\mathbf{T}^n)$. Тогда имеют место неравенства:

$$\sup_{f\in \mathsf{B}^s_{p\min(p,\theta)}(\mathbf{T}^n)} \left\|f - S_\Delta(f)\middle|B^t_{q\max(q,\tau)}\right\| = \sup_{f\in \mathsf{F}^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n)} \left\|f - S_\Delta(f)\middle|F^t_{q\tau}\right\| =$$

$$\sup_{f\in \mathsf{B}^s_{p\max(p,\theta)}(\mathbf{T}^n)} \left\|f - S_\Delta(f)\middle|B^t_{q\min(q,\tau)}\right\|.$$

Величины справа и слева здесь согласно теореме 1 совпадают по порядку с величиной справа в (7), следовательно,

$$\sup_{f\in \mathsf{F}^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n)} \left\|f - S_\Delta(f)\middle|F^t_{q\tau}\right\| \cong 2^{-\nu_\Delta(s-t-(1/p-1/q)_+)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
[2] Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 423 с.
[3] Triebel H., Schmeisser H.-J. Topics in Fourier analysis and function spaces. – Chichester and New York: Wiley, 1987. – 300 p.
[4] Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наукова думка, 1987. – 268 с.
[5] Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
[6] Orlovskii D.G. On multipliers in the spaces $B^r_{p\theta}$ // Analysis Mathematica. – 1979. – Т. 5. – С. 207-218.

REFERENCES

[1] Dzjadyk V.K. *Vvedenie v teoriju ravnomernogo priblizhenija funkcij polinomami.* M.: Nauka, **1977**, 512 s. (in Russ.).
[2] Kornejchuk N.P. *Tochnye konstanty v teorii priblizhenija*. M.: Nauka, **1987**, 423 s. (in Russ.).
[3] Triebel H., Schmeisser H.-J. *Topics in Fourier analysis and function spaces.* Chichester and New York: Wiley. **1987**, 300 p.
[4] Stepanec A.I. *Klassifikacija i priblizhenie periodicheskikh funkcij*. Kiev: Naukova dumka, **1987**, 268 s. (in Russ.).
[5] Nikol'skij S.M. *Priblizhenie funkcij mnogikh peremennykh i teoremy vlozhenija*. M.: Nauka, **1977**, 456 c. (in Russ.).
[6] Orlovskii D.G. *Analysis Mathematica.* **1979,** 5, 207-218.

ТЕГІС ПЕРИОДТЫ ФУНКЦИЯЛАР КЛАСТАРЫН ТОЛҚЫНШАЛАРМЕН ЖУЫҚТАУ

Ш. А. Балғымбаева, Д. М. Нұрбаева, Ж. М. Нұрмухамедова

Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: функциялар кеңістігі, жұықтау, толқынша.

Аннотация. Жұмыста Лизоркин толқыншылар жүйесі бойынша Фурье қосындыларымен Никольский–Бесов $\mathsf{B}^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n)$ және Лизоркин–Трибель $\mathsf{F}^s_{p\theta}(\mathbf{T}^n)$ кластарын басқа Никольский –Бесов $B^t_{q\tau}(\mathbf{T}^n)$ немесе Лизоркин–Трибель $F^t_{q\tau}(\mathbf{T}^n)$ кеңістігінде жұықтау есебі клас пен кеңістіктің параметрлерінің кейбір арақатынастары үшін зерттелген.

Поступила 26.11.2014 г.