N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 6, Number 298 (2014), 49 – 54

SOLVING ALGORITHM FOR PROBLEMS OF WATER FILTRATION THROUGH A DAM WITH BREAKS IN ORTHOTROPIC MEDIA

A. T. Kalbaeva, S. D. Kurakbaeva, A. M. Brener

M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan

Key words: algorithm, water filtration, dam with breaks, orthotropic media, method of the boundary elements

Abstract. In our work the main research results and algorithm of the numerical solving problems of water filtration through a dam with breaks are submitted in cases of isotropic and orthotropic media. In work we used the method of the boundary elements which have shown the good possibilities for solving problems with free boundaries. On the basis of this method the methodology for calculating liquid filtration through soil dam, allowing to solve various problems with free surfaces, taking into account breaks in the dam body, has been carried out.

УДК 519.67

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ ВОДЫ ЧЕРЕЗ ДАМБУ С ПРОРЫВАМИ В ОРТОТРОПНОЙ СРЕДЕ

А. Т. Калбаева, С. Д. Куракбаева, А. М. Бренер

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

Ключевые слова: алгоритм, фильтрации воды, дамба с прорывами, ортотропная среда, метод граничных элементов.

Аннотация. Исследование процесса фильтрации грунтовых и сточных вод из открытых водоемов через насыпные дамбы является актуальной задачей, так как непосредственно связано с вопросами защиты окружающей среды от катастроф. В статье представлены результаты исследования и алгоритм численного решения задач фильтрации воды через дамбу с прорывами в случаях изотропной и ортотропной среды. В работе использовали метод граничных элементов, продемонстрировавший большие возможности для решения сложных задач со свободными границами. На основе этого метода разработана методика расчета фильтрации жидкости через дамбу, позволяющая решать различные задачи со свободными поверхностями с учетом прорывов в перегородке, ограничивающей дамбу. Эта методика реализована в алгоритмах и программных комплексах. Достоверность получаемых данных с использованием методики и программ расчета подтверждена решением ряда тестовых задач и сравнением численных исследований с апробированными методами.

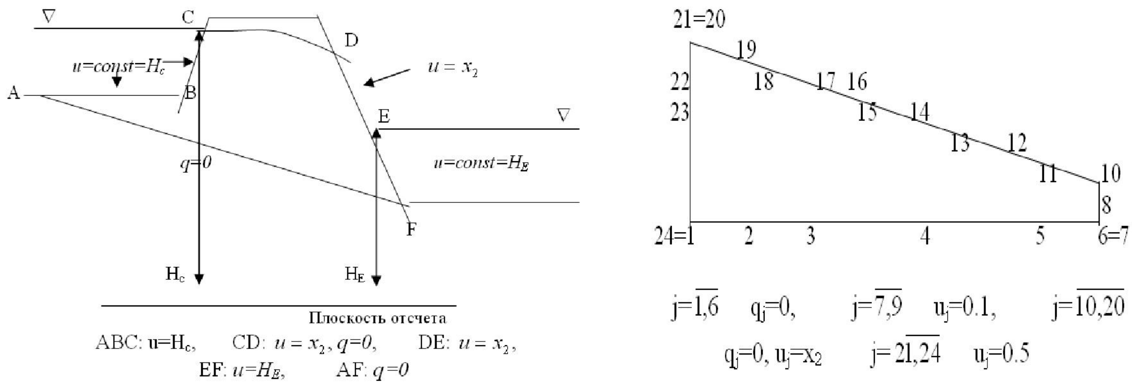
Применение методов математического моделирования для решения задач фильтрации через гидравлические сооружения является актуальной практической задачей [1]. Использование математического аппарата для решения такого класса задач позволяет провести анализ и дать оценку в случае аварийной ситуации, возникающей в результате трещинообразования гидротехнических сооружений под воздействием фильтрационного потока. Для решения данных задач целесообразно применение метода граничных элементов [2].

В данной статье приводится алгоритм численного решения задач фильтрации воды через прорывы дамбы в случае среды с изотропными и ортотропными свойствами [3-5].

Рассмотрим математическую модель среды плотины в случае однородности и изотропности. Поэтому задача сводится к уравнению Лапласа относительно скорости u:

$\Delta u = 0$ с граничными условиями: $q=0$ на непроницаемой границе (поверхность AF на рисунке 1), $u=const$ на поверхностях ABC и EF пористой среды, $u = x_2$ на фильтрующей поверхности DE, $u = x_2$ и $q=0$ на свободной поверхности CD, где $q=\dfrac{\partial u}{\partial n}$ - поток.

На рисунке 1а приведена схема грунтового блока образующего плотину, показаны уровни воды в водоеме и после фильтрации через блок, а также граничные условия для каждого участка границы грунтового блока, в том числе и для свободной границы CD (иначе будем называть свободной поверхностью).



а б

Рисунок 1 – Схема грунтового блока с граничными условиями

Для реализации метода граничных элементов вся граница грунтового блока разбита на 24 граничных элемента, как показано на рисунке 1б. Для простоты, не теряя физической сущности процесса, грунтовый блок плотины был принят в виде прямоугольной трапеции. Высота верхнего и нижнего бьефов составила соответственно 0,5 и 0,1 относительно поверхности отсчета. При численном расчете этой задачи начальное положение свободной поверхности задается произвольным образом. Затем в процессе решения положение свободной поверхности уточнялось на каждой итерации до необходимой точности. Окончательное положение свободной поверхности получено после 6-ой итерации [2].

Приведем алгоритм решения задачи:

1. Вводим узловые точки.
2. Находим нормали $n^j = (n_1{}^j, n_2{}^j)$,

где $n_1{}^j = \dfrac{x_2{}^{j+1} - x_2{}^j}{l_j}$; $n_2{}^j = -\dfrac{x_1{}^{j+1} - x_1{}^j}{l_j}$ для линейных граничных элементов;

где $l_j = \sqrt{(x_1{}^{j+1} - x_1{}^i)^2 + (x_2{}^{j+1} - x_2{}^i)^2}$ - длина j-го элемента. l_6, l_{20}, $l_{24}=0$.

3. Находим коэффициенты влияния: $x_1 = \dfrac{(1-\eta)x_1{}^j + (1+\eta)x_1{}^{j+1}}{2}$;

$x_2 = \dfrac{(1-\eta)x_2{}^j + (1+\eta)x_2{}^{j+1}}{2}$; $\eta = -1: x_1 = x_1{}^j$, $x_2 = x_2{}^j$ то есть $(x_1{}^j, x_2{}^j)$ $\eta = 1: x_1 = x_1{}^{j+1}$, $x_2 = x_2{}^{j+1}$ то есть $(x_1{}^{j+1}, x_2{}^{j+1})$

4. Находим $h^1{}_{ij} = \int\limits_{\Gamma_j} \varphi_1 q^* d\Gamma$ - криволинейный интеграл 1-го рода.

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(1-\eta); \; d\Gamma = |J| d\eta$$

$$q_{ij}^{\ *} = \frac{\partial u_{ij}^{\ *}}{\partial n^j} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(1/r_{ij})} \frac{(-1)}{r_{ij}^{\ 2}} \frac{1}{2r_{ij}} (2(x_1^{\ j} - x_1^{\ i}) n_1^{\ j} + 2(x_2^{\ j} - x_2^{\ i}) n_2^{\ j}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r_{ij}^{\ 2}} (\overline{r_{ij}}, n^j)$$

$$\Rightarrow h^1{}_{ij} = \int_{-1}^{1} \frac{1-\eta}{2} \left(-\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r_{ij}^{\ 2}} (r_{ij}, \overline{\eta^j}) \right) |J| d\eta$$

где $r^{ij} = (x_1^{\ j} - x_1^{\ i}, x_2^{\ j} - x_2^{\ i})$; $r_{ij}^{\ 2} = (x_1^{\ j} - x_1^{\ i})^2, (x_2^{\ j} - x_2^{\ i})^2$

$(\overline{r_{ij}}, n^j) = (x_1^{\ j} - x_1^{\ i}) n_1^{\ j} + (x_2^{\ j} - x_2^{\ i}) n_2^{\ j}$ - скалярное произведение.

$$|J| = \sqrt{x_1'^2(\eta) + x_2'^2(\eta)} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}(x_1^{\ j+1} - x_1^{\ j})\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(x_2^{\ j+1} - x_2^{\ j})\right)^2} \text{ – якобиан} = \frac{d\Gamma}{d\eta}$$

Для вычисления этого определенного интеграла используем стандартные формулы гауссовых квадратур. В итоге приходим к виду:

$$h^1{}_{ij} = \sum_{k=1}^{4} \frac{1-\eta_k}{2} \left(-\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r_{ij_k}^{\ 2}} (r_{ij_k}^{\ 2}, \overline{n^j}) \right) |J| \frac{W_k}{2}$$

точка j_k соответствует η_k на j-том элементе.

W_k делится на два, т.к. сумма весов равна 2. Аналогично для h_{ij}^1:

$$h^2{}_{ij} = \sum_{k=1}^{4} \frac{1+\eta_k}{2} \left(-\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r_{ij_k}^{\ 2}} (r_{ij_k}^{\ 2}, \overline{n^j}) \right) |J| \frac{W_k}{2}$$

Если j=6,20,24, то $h_{ij}^1, h_{ij}^2 = 0$, так как l_j=0 и если i=j, то $h_{ii}^1 = 0, h_{ii}^2 = 0$, так как $r_{ii_k} \perp n^i \Rightarrow (r_{ii_k}, n^j) = 0$ $r_{iik} \perp n^i \Rightarrow (r_{iik}, n^j) = 0$

Аналогично находим:

$$g^1{}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \varphi_1 u^* d\Gamma = \int_{-1}^{1} \frac{1-\eta}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{ij}} \right) |J| d\eta = \sum_{k=1}^{4} \frac{1-\eta_k}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{ij_k}} \right) |J| \frac{W_k}{2},$$

$$g^2{}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \varphi_2 u^* d\Gamma = \int_{-1}^{1} \frac{1+\eta}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{ij}} \right) |J| d\eta = \sum_{k=1}^{4} \frac{1+\eta_k}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{ij_k}} \right) |J| \frac{W_k}{2}.$$

Если j=6,20,24, то $g_{ij}^1, g_{ij}^2 = 0$, так как l_j=0,

где $g^k{}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \varphi_k u_{ii_k}^{\ *} d\Gamma$ - коэффициент влияния, характеризующий связь между точкой I и узлом k на j-том элементе.

Найдем: $g_{ii}^{\ 1} = \frac{1}{2\pi} \frac{l_i}{2} \left(\frac{3}{2} - \ln l_i \right)$, $\quad g_{ii}^{\ 2} = \frac{1}{2\pi} \frac{l_i}{2} \left(\frac{3}{2} - \ln l_i \right)$

5. Нахождение компонентов матриц H_{ij} и G_{ij} :

$$G_{ij} = g_{ij-1}^{\ 2} + g_{ij}^{\ 1}, i = \overline{1,N}; j = \overline{2,N} \qquad G_{i1} = g_{iN}^{\ 2} + g_{i1}^{\ 1}, i = \overline{1,N}$$

$$H_{ij} = h_{ij-1}^{\ 2} + h_{ij}^{\ 1}, i = \overline{1,N}; j = \overline{2,N}; i \neq j \qquad H_{i1} = h_{iN}^{\ 2} + h_{i1}^{\ 1}, i = \overline{1,N}$$

6. Получаем систему уравнений AY=F, которую решаем методом Гаусса и найдем решение $Y = (y_1, ..., y_N)$

$j=\overline{1,6}: a_{ij}=H_{ij}, f_i=f_i+G_{ij}q_j$ $\quad j=\overline{7,9}: a_{ij}=-G_{ij}, f_i=f_i-H_{ij}u_j$

$j=\overline{10,20}: a_{ij}=H_{ij}, f_i=f_i+G_{ij}q_j$ $\quad j=\overline{21,N}: a_{ij}=-G_{ij}, f_i=f_i-H_{ij}u_j$

7. На свободной границе $j=\overline{10,20}: u_j=y_j$ сравнением u_j и x_2^j по дополнительному условию: максимальная разность между вычисленными значениями потенциала и высотой каждого узла, лежащего на свободной поверхности, должна не превышать 0,1% высоты, то есть если $\frac{\left|u_j-x_2^{\,j}\right|}{u_j}<0{,}001$ при $j=\overline{10,20}$, то искомое решение получено, если это не так, то $x_2^{\,j}=u_j$ и переходим к шагу 2. В случае, если со стороны водоема имеется преграда, предотвращающая фильтрацию, то возможно нарушение герметичности преграды с последующим прорывом дамб. На рисунке 2 показаны некоторые возможные случаи расположения прорывов:

а) два прорыва в непроницаемой преграде дамбы (рисунок 2а), б) прорыв в центре преграды дамбы, а также на дне непроницаемая пластина (рисунок 2б). Схема грунтового блока дамбы в рассматриваемых случаях показаны на рисунке 2в, 2г.

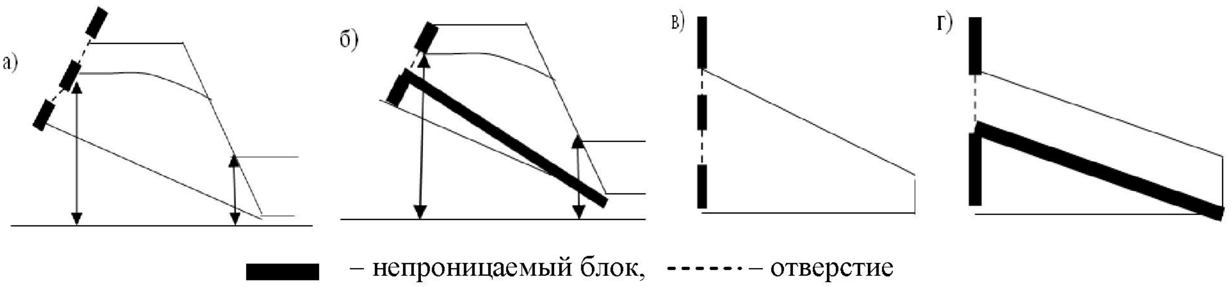


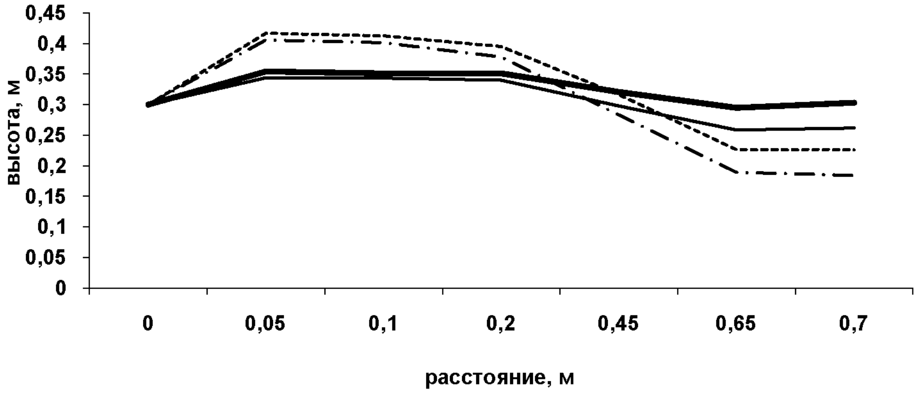
Рисунок 2 – Различные комбинации частичных прорывов дамбы:
а, в – два прорыва; б, г – прорыв в центре, на дне непроницаемая пластина

В результате численного эксперимента была получена картина линий тока и определено положение свободной границы при фильтрации жидкости через дамбу, ограниченную перегородкой с прорывами.

Как видно из рисунка 3, при фильтрации воды через дамбу с двумя прорывами в перегородке дамбы свободная поверхность оказалась выше, т.е. смачивание грунта происходит в большем объеме, чем при прорыве в центре перегородки, т.е. при топографии, соответствующей рисунку 2г).

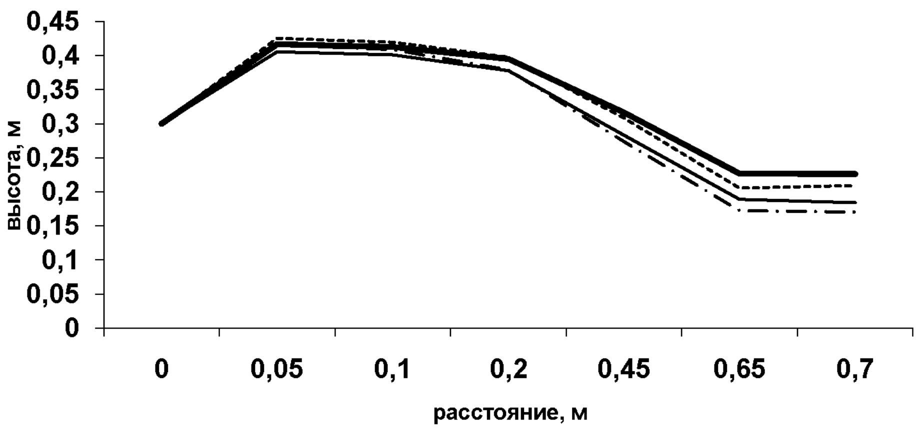
Аналогичное исследование было проведено с целью исследования изменения положения свободной границы в случае ортотропной среды, т.е. когда коэффициенты фильтрации зависят от направления течения в пористой среде. Такой случай является довольно распространенным в реальных условиях. Разрешающее уравнение в осях координат, связанных с направлением ортотропии, можно записать для двумерного случая в виде $k_1\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\,2}}+k_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^{\,2}}=0$, где k_i - характеристики среды в направлении i-й оси ортотропии. Фундаментальным решением этого уравнения является функция $u^*=\frac{1}{(k_1k_2)}\ln\frac{1}{r(\xi,x)}$ [1].

Некоторые результаты расчетов показаны на рисунках 3, 4.



– два прорыва (ортотропная среда)
– прорыв в центре, на дне непроницаемая пластина (ортотропная среда)
– два прорыва (изотропная среда)
– прорыв в центре, на дне непроницаемая пластина (изотропная среда)

Рисунок 3 – Сравнение расчетных результатов для потенциала скорости при течении через дамбу для изотропной и ортотропной среды при коэффициентах $k_1 = 0.9$, $k_2 = 0.2$



– два прорыва (изотропная среда)
– прорыв в центре, на дне непроницаемая пластина (изотропная среда)
– два прорыва (ортотропная среда)
– прорыв в центре, на дне непроницаемая пластина (ортотропная среда)

Рисунок 4 – Сравнение расчетных результатов для потенциала скорости при течении через дамбу для изотропной и ортотропной среды при коэффициентах $k_1 = 0.4$, $k_2 = 0.8$

По результатам исследования можно сделать следующие выводы:

1. При фильтрации воды через дамбу с двумя прорывами в перегородке дамбы свободная поверхность располагается выше, т.е. смачивание грунта происходит в большем объеме, чем при прорыве в центре перегородки в случае ортотропной среды при различных коэффициентах.

2. Смачивание тела дамбы в случае изотропной среды происходит в большем объеме чем для ортотропной среды.

Проведенное исследование подтверждает возможности использования метода граничных элементов для решения сложных задач фильтрации жидкости в неоднородных средах. Поскольку такие задачи часто возникают в процессе проектирования различных гидротехнических сооружений, актуальной задачей в плане развития данной методологии является разработка алгоритмов решения нестационарных задач фильтрации с учетом развития струйных течений в грунте. Именно эти задачи и будут предметом дальнейших исследований авторов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бреббия К., Телес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.

[2] Калбаева А.Т., Бердалиева Г.А. Численное исследование фильтрации жидкости через дамбу с водонепроницаемыми закладными элементами // Сборник научных трудов аспирантов, магистрантов, стажеров-исследователей ЮКГУ им. М. Ауезова. – Шымкент, 2002. – № 3. – С. 8-11.

[3] Калбаева А.Т., Куракбаева С.Д., Серимбетов М.А.Применение метода граничных элементов для решения задач фильтрации воды через дамбу // Наука и образование Южного Казахстана. – 2010. – № 2(81). – С. 84-87.

[4] Калбаева А.Т., Куракбаева С.Д., Бренер А.М. Моделирование фильтрации через дамбу с прорывами в ортотропных средах // Сборник статей V Междунар. науч. конф. «Инновационное развитие и востребованность науки в современном Казахстане» (Ч. IV) естественно-технические науки. – Алматы, 24-25 ноября, 2011. – С. 105-108.

[5] Калбаева А.Т., Куракбаева С.Д., Бренер А.М. Решение задач фильтрации воды через дамбу с прорывами // Наука и образование Южного Казахстана. – 2010. – № 6(85). – С. 84-87.

REFERENCES

[1] Brebbija K., Teles Zh., Vroubel L. *Metody granichnyh jelementov.* M.: Mir, **1987**, 524 p. (in Russ.).

[2] Kalbaeva A.T., Berdalieva G.A. *Chislennoe issledovanie fil'tracii zhidkosti cherez dambu s vodonepronicaemymi zakladnymi jelementam. Sbornik nauchnyh trudov aspirantov, magistrantov, stazherov-issledovatelej UKGU im. M.Auezova.* Shymkent, **2002,** N 3. P. 8-11 (in Russ.).

[3] Kalbaeva A.T., Kurakbaeva S.D., Serimbetov M.A. *Primenenie metoda granichnyh jelementov dlja reshenija zadach fil'tracii vody cherez dambu. Nauka i obrazovanie Juzh-nogo Kazahstana.* **2010**. N 2(81). P. 84-87. (in Russ.).

[4] Kalbaeva A.T., Kurakbaeva S.D., Brener A.M. *Modelirovanie fil'tracii cherez dambu s proryvami v ortotropnyh sredah. Sbornik statej V Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii «Innovacionnoe razvitie i vostrebovannost' nauki v sovremennom Kazahstane» (chast' IV) estestvenno-tehnicheskie nauki.* Almaty: 24-25 nojabrja, **2011**. P. 105-108. (in Russ.).

[5] Kalbaeva A.T., Kurakbaeva S.D., Brener A.M. *Reshenie zadach fil'tracii vody che-rez dambu s proryvami. Nauka i obrazovanie Juzhnogo Kazahstana*. **2010**. N 6(85). P. 84-87. (in Russ.).

ОРТОТРОПТЫҚ ОРТАДАҒЫ СУ БӨГЕТІН ЖЫРЫП ӨТКЕН СУДЫҢ СҮЗГІЛЕНУ ЕСЕБІН ШЕШУДІҢ АЛГОРИТМІ

А. Т. Калбаева, С. Д. Куракбаева, А. М. Бренер

М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан

Тірек сөздер: алгоритм, судың сүзгіленуі, жырылған су бөгеті, ортотроптық орта, шекаралық элементтер әдісі.

Аннотация. Мақалада ортотроптық және изотроптық ортадағы су бөгетін жырып өткен судың сүзгілену есебін зерттеудің нәтижелері және сандық шешудің алгоритмі келтірілген. Шекаралық элементтер әдісін және есептеу бағдарламасын қолданып алынған нәтижелердің дұрыстығы бірқатар тестілеу есептерін шешу, сандық зерттеулерді сыналған әдістермен және нақты мәліметтермен салыстыру арқылы тексерілген.

Поступила 26.11.2014 г.